

Diplomarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
Diplomingenieur
(Dipl.-Ing.)

**Entwicklung von
Verhaltensmodellen für
mikromechanische Komponenten**

Vorgelegt von
Geboren

Tobias Nähring
am 13. März 1970 in Dresden

Betreuer
Verantwortlicher Hochschullehrer

Prof.Dr.-Ing. habil. A. Reibiger
Prof.Dr.-Ing. habil. A. Reibiger

Tag der Einreichung

14. Februar 2000

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Kontinuumstheoretische Grundlagen	3
1.1 Modellierung elastischer Körper	3
1.1.1 Kinematik	3
1.1.2 Dynamik	6
1.1.3 Materialgesetz	16
1.2 Koordinatenwechsel	25
1.2.1 Drehbewegungen	26
1.2.2 Koordinatenwechsel	28
1.2.3 Die Bewegungsgleichung in neuen Koordinaten	31
1.3 Linearisierung der Bewegungsgleichung	32
2 Die Methode der finiten Elemente (FEM)	37
2.1 Umformulierung der Bewegungsgleichung in eine Variationsgleichung	37
2.2 Finite Elemente	40
2.3 FEM-Systemgleichungen bzgl. Inertialsystemen	48
2.4 FEM-Systemgleichungen bzgl. beschleunigter Bezugssysteme	50
3 Netzwerkmodellierung	53
3.1 Grundlagen der Netzwerkmodellierung	53
3.2 Netzwerkmodelle mechanischer Systeme	56
3.3 Beispiel für die Generierung eines Netzwerkes aus einem FEM-System	61
Schluß	74

Einleitung

Durch die schnelle Entwicklung der Mikromechanik in den letzten Jahren (siehe [29]) ist ein Bedarf an geeigneten Simulationsprogrammen für Systeme mit Kopplungen zwischen mikromechanischen und mikroelektronischen Komponenten entstanden. Das belegt zum Beispiel auch folgendes Zitat aus [28]:

„Technologies for fabricating a variety of MEMS devices have developed rapidly, but computational tools that allow engineers to quickly design and optimize these micromachines have not kept pace. Inadequate simulation tools force MEMS designers to resort to physical prototyping. To realistically simulate the behavior of complete micromachines, algorithmic innovation is necessary in several areas.“

Die Netzwerkanalyseprogramme ELDO und SABER und die zugehörigen Modellbeschreibungssprachen HDL-A und MAST eignen sich zur Beschreibung von Systemen, die aus Komponenten verschiedener physikalischer Bereiche (Elektronik, Mechanik, Thermodynamik) bestehen. Jedoch sind diese Programme nur zur Modellierung von Systemen mit konzentrierten Parametern vorgesehen.

Programme, die auf der Methode der finiten Elemente (FEM) beruhen, wie zum Beispiel ANSYS, SAMCEF und FELT (siehe [3, 1, 2]) dienen der numerischen Lösung der partiellen Differentialgleichungen, die das Verhalten elastischer Körper und Strukturen beschreiben.

Am Fraunhofer Institut für Integrierte Schaltungen (Außenstelle für Automatisierung des Schaltkreis- und Systementwurfes (EAS)) wurde ein Programm entwickelt, welches mittels ANSYS erstellte FEM-Systeme in Netzwerkmodelle in der Beschreibungssprache MAST übersetzt. Im Rahmen einer Tätigkeit als studentische Hilfskraft habe ich dieses Programm so erweitert, daß bei den generierten Netzwerkmodellen auch eine beschleunigte Bewegung des Bezugssystems gegenüber einem Inertialsystem berücksichtigt werden kann. Dabei wurde die in der ANSYS-Dokumentation [3] und im Artikel [19] von Lorenz und Neul angegebene Transformation der Knotengeschwindigkeiten und Knotenbeschleunigungen des FEM-Systems benutzt.

Im ersten Kapitel dieser Diplomarbeit werden die kontinuumstheoretischen Grundlagen für diese Transformation dargestellt. Eine Begründung für die Anwendbarkeit dieser Transformation im Zusammenhang mit der Methode der finiten Elemente wird im zweiten Kapitel gegeben. Schließlich wird im letzten Kapitel gezeigt, wie FEM-Systeme als Mehrpole von Netzwerken modelliert werden können.

Ich möchte mich rechtherzlich bei meinem Betreuer Herrn Professor Reibiger bedanken, der mir die denkbar besten Arbeitsbedingungen für die Diplomarbeit eingeräumt hat und mir stets als ein Ratgeber und geduldiger Zuhörer zur Seite stand. Weiterhin bin ich Herrn Dr. Haase und Herrn Reitz vom Fraunhofer Institut für Integrierte Schaltungen für ihre tatkräftige Unterstützung und ihren Rat sehr zu Dank verpflichtet.

Kapitel 1

Kontinuumstheoretische Grundlagen

1.1 Modellierung elastischer Körper

Am Anfang der Diplomarbeit werden die kontinuumstheoretischen Grundlagen dargestellt, auf denen die Modellierung elastischer Körper beruht. Elastische Körper bilden die Grundbausteine mikromechanischer Systeme.

Die Darstellung stützt sich zum großen Teil auf das Buch [20] von J. E. Marsden und J. R. Hughes. Auf den dort gewählten Zugang über die Tensoranalysis wird hier jedoch verzichtet. Vielmehr wird hier der Anschauungsraum durch den orientierten euklidischen Raum \mathbb{R}^3 modelliert. Elastische Körper werden durch „gutartige“ Teilmengen des \mathbb{R}^3 beschrieben, die zeitabhängig in den Modellraum \mathbb{R}^3 eingebettet werden. Die Tensoranalysis gibt zwar tiefere Einsichten in die Kontinuumstheorie als dies mit einer Modellierung auf der Grundlage euklidischer Räume möglich ist, jedoch würde der dafür benötigte mathematische Apparat den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen.

Wichtige axiomatische Voraussetzungen (wie z. B. die Bewegungsinvarianz von Materialgesetzen) und Materialeigenschaften (wie z. B. die Isotropie von Materialien) und Konsequenzen daraus sind meines Erachtens nach nur im Kontext einer allgemeinen (nichtlinearen) Kontinuumstheorie zu verstehen. Deshalb wird hier nicht sofort auf eine lineare Theorie zurückgegriffen, sondern diese wird durch die Linearisierung aus der allgemeinen Kontinuumstheorie gewonnen.

1.1.1 Kinematik

Die Grundmenge eines *Körpers* sei, wie zum Beispiel in [9], durch ein (stückweise glatt berandetes und beschränktes) Gebiet $\mathfrak{B} \subset \mathbb{R}^3$ gegeben. Eine *Plazierung* des Körpers ist ein Diffeomorphismus $\Phi : \mathfrak{B} \rightarrow \Phi(\mathfrak{B}) \subset \mathbb{R}^3$, der die Grundmenge des Körpers in den Modellraum \mathbb{R}^3 des Anschauungsraumes einbettet. (Dieser Diffeomorphismus sei so, wie alle weiteren einzuführenden Abbildungen, hinreichend oft stetig differenzierbar, so daß alle folgenden Operationen sinnvoll ausführbar sind.) Vergleicht man diese Definitionen mit der Beschreibung der Koordinaten x_1, \dots, x_n von n Massepunkten in der Punktmassenmechanik, so entsprechen die Punkte $X \in \mathfrak{B}$ den Indizes $1, \dots, n$ während die Vektoren $x = \Phi(X)$ mit $X \in \mathfrak{B}$ den Ortskoordinaten x_i ($i = 1, \dots, n$) der Massepunkte entsprechen.

Zur Beschreibung eines elastischen Körpers sind außer seiner Grundmenge noch weitere Informationen, wie zum Beispiel die Massendichte des Körpers und die Elastizitätseigenschaften des Körpers, notwendig. Dennoch wird der Einfachheit halber im weiteren die Grundmenge \mathfrak{B} eines Körpers schon selber als *Körper* bezeichnet. (Dies ist in der Kontinuumsmechanik so üblich. Siehe zum Beispiel [9, 20].)

Eine *Bewegung* eines Körpers \mathfrak{B} ist eine Familie $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$, die jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ eine Plazierung Φ_t von \mathfrak{B} zuordnet (siehe hierzu auch Bild 1.1). Für $X \in \mathfrak{B}$ sei $t \mapsto \Phi_t(X)$ mindestens zweimal stetig differenzierbar. Überhaupt wird im folgenden für alle Zeitfunktionen immer die notwendige Differenzierbarkeit vorausgesetzt.

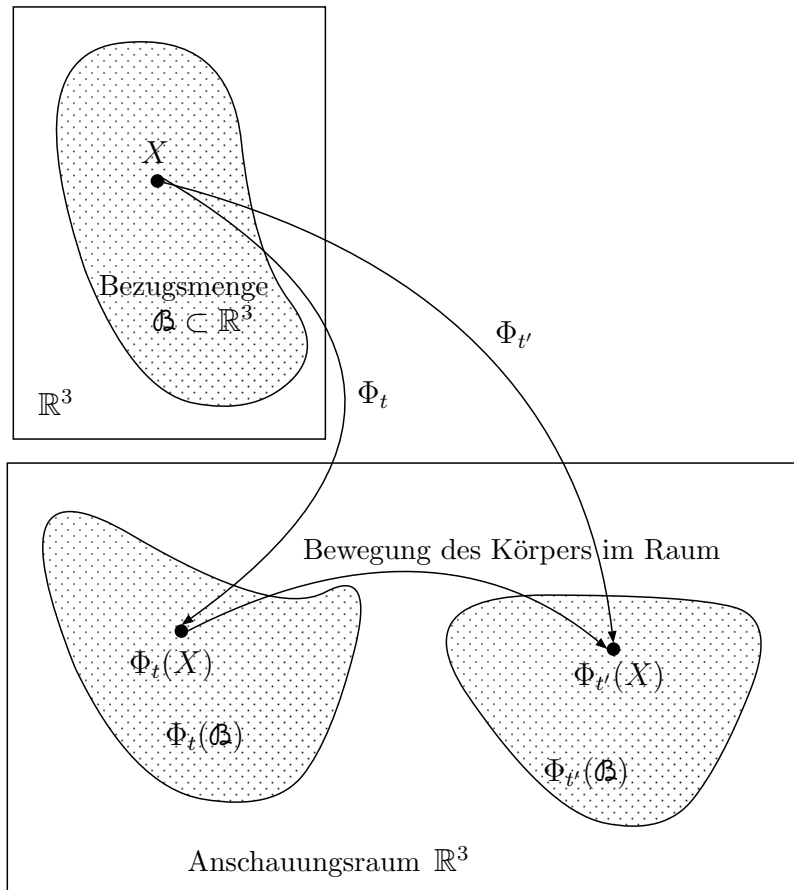


Abbildung 1.1: Modellierung der Bewegung eines Körpers im Anschauungsraum.

Zur Beschreibung der Trägheits- und Schwereigenschaften eines Körpers \mathfrak{B} wird jeder Plazierung $\Phi : \mathfrak{B} \rightarrow \Phi(\mathfrak{B})$ des Körpers eine (stetige) *räumliche (Massen-) Dichtefunktion* $\rho : \Phi(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ zugeordnet. Diese Zuordnung ist jedoch nicht vollkommen willkürlich wählbar, sondern unterliegt dem Axiom über die Massenerhaltung welches im folgenden beschrieben werden soll.

Im Axiom über die Massenerhaltung wie auch in mehreren weiteren Axiomen der Kontinuumsmechanik fordert man, daß eine bestimmte Eigenschaft für jeden Teil des Gesamtkörpers gelten soll. Hierbei sei unter einem *Teil* U des Körpers \mathfrak{B} ein stückweise glatt berandetes Gebiet $U \subset \mathfrak{B}$ zu verstehen.

Axiom 1 (Massenerhaltung) Seien Φ und $\bar{\Phi}$ zwei Plazierungen eines Körpers \mathfrak{B} sowie ρ und $\bar{\rho}$ die zu diesen Plazierungen gehörigen räumlichen Dichten. Dann gelte für jeden Teil U des Körpers die Gleichung

$$\int_{x \in \Phi(U)} \rho(x) \, dv = \int_{x \in \bar{\Phi}(U)} \bar{\rho}(x) \, dv. \quad (1.1)$$

Eine Konsequenz aus dem Axiom über die Massenerhaltung ist, daß die Dichte durch eine von der Platzierung unabhängige „materielle Dichte“ ρ_{ref} beschrieben werden kann.

Transformiert man nämlich in Gleichung (1.1) die Integrationsvariablen von den (räumlichen) Ortskoordinaten x in die (materiellen) Ortskoordinaten $X = \Phi^{-1}(x)$,

$$\int_{X \in U} \rho(\Phi(X)) \det(D\Phi(X)) \, dV = \int_{X \in U} \bar{\rho}(\bar{\Phi}(X)) \det(D\bar{\Phi}(X)) \, dV, \quad (1.2)$$

so ist auf beiden Seiten über den Teil U des Körpers zu integrieren. Laut Axiom über die Massenerhaltung, sollen die Integrale für jeden Teil U des Körpers einander gleich sein. Daraus folgt, daß die (stetigen) Integranden dieser Integrale in jedem Punkt $X \in \mathfrak{B}$ übereinstimmen,

$$\rho(\Phi(X)) \det(D\Phi(X)) = \bar{\rho}(\bar{\Phi}(X)) \det(D\bar{\Phi}(X)).$$

Somit ist bei Gültigkeit des Axioms über die Massenerhaltung die durch

$$\rho_{\text{ref}}(X) := \rho(\Phi(X)) \det(D\Phi(X))$$

definierte *materielle Dichte* $\rho_{\text{ref}} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$ unabhängig von der gewählten Platzierung Φ . Im weiteren Text wird immer von der Gültigkeit des Axioms über die Massenerhaltung ausgegangen, obwohl dies nicht immer explizit erwähnt wird.

Wie schon bei den eingeführten Dichtebegriffen sollen im folgenden immer Größen, die auf \mathfrak{B} definiert sind, als *materielle Größen* bezeichnet werden, während Größen, die auf $\Phi(\mathfrak{B})$ definiert sind, als *räumliche Größen* bezeichnet werden sollen. Materielle Größen werden wie in [20] zumeist mit Großbuchstaben und räumliche mit Kleinbuchstaben bezeichnet, so wie es schon mit den räumlichen Ortskoordinaten x und den materiellen Ortskoordinaten X gehandhabt wurde. Die Dichten ρ und ρ_{ref} sind in [20] und damit auch hier wohl die berühmte Ausnahme von der Regel.

Die zeitliche Ableitung

$$V_t(X) := \frac{d}{dt} \Phi_t(X)$$

einer Bewegung Φ_t in einem materiellen Punkt $X \in \mathfrak{B}$ heißt *materielle Geschwindigkeit* dieses Punktes bezüglich Φ_t . So ist für alle materiellen Punkte $X \in \mathfrak{B}$ ein Vektor $V_t(X)$ erklärt, insgesamt ergibt sich auf diese Weise das Vektorfeld $V_t : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ der *materiellen Geschwindigkeit* der Bewegung Φ_t .

Das Geschwindigkeitsfeld ist also zunächst für die Grundmenge \mathfrak{B} des Körpers erklärt. Die materielle Geschwindigkeit läßt sich jedoch durch

$$v_t(x) := V_t(\Phi_t^{-1}(x))$$

auf die (beobachtbaren) Raumpunkte $x \in \Phi_t(\mathfrak{B})$ übertragen. Das Vektorfeld v_t heißt *räumliche Geschwindigkeit* von Φ_t .

1.1.2 Dynamik

In diesem Abschnitt werden die Bilanzgleichungen der Dynamik (Kräftebilanz, Momentenbilanz und Energiebilanz) eingeführt, die den prinzipiellen Zusammenhang zwischen Kraft- und Ortsgrößen beschreiben. Im Zusammenhang mit den im nächsten Abschnitt behandelten Materialgesetzen, ergeben sich daraus die Bewegungsgleichungen für elastische Körper.

Es wird angenommen, daß auf den Körper eine (*massebezogene*) *räumliche Volumenkraft* $b_t : \Phi_t(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ wirken kann. Das soll heißen, daß die durch b_t auf einen Teil U des Körpers ausgeübte Kraft gleich

$$\int_{x \in \Phi_t(U)} b_t(x) \rho_t(x) \, dv$$

ist. Ein Beispiel für eine räumliche Volumenkraft ist die Erdbeschleunigung.

Weiter wird davon ausgegangen, daß auch auf die Oberfläche des Körpers Kräfte einwirken können (zum Beispiel Kontaktkräfte). Diese werden durch ein (stetiges) Vektorfeld $\vartheta_t^\partial : \partial\Phi_t(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ modelliert, welches im folgenden als (*räumliche*) *Oberflächenspannung* bezeichnet wird. Die gesamte Kraft, die durch dieses Kraftdichtefeld auf den Körper ausgeübt wird, ergibt sich zu

$$\int_{x \in \partial\Phi_t(\mathfrak{B})} \vartheta_t^\partial(x) \, da. \quad (1.3)$$

Die Kraftgrößen b_t , ϑ_t^∂ und die *Bewegung der Oberfläche* des Körpers

$$\Phi_t^\partial := \Phi|_{\partial\mathfrak{B}}$$

modellieren die beobachtbaren äußeren Größen des elastischen Körpers. Schrittweise soll innerhalb der nächsten zwei Abschnitte für diese äußeren Größen eine Relation aufgestellt werden, die das physikalische Verhalten eines elastischen Körpers beschreibt. Diese soll als *Verhaltensrelation des elastischen Körpers* bezeichnet werden. In den darstellenden Gleichungen der Verhaltensrelation tritt die Bewegung $\Phi_t(X)$ der im Inneren des Körpers gelegenen Punkte $X \in \mathfrak{B}$ als innere Größe auf.

Schneidet man aus einem deformierten Körper \mathfrak{B} einen Teil U heraus, so bleibt die Deformation des Teils nur dann erhalten, wenn auf seine Oberfläche eine Kraftdichte einwirkt. Um dieser Erfahrungstatsache Rechnung zu tragen, wird die Existenz eines cauchyschen Spannungsvektorfeldes postuliert (vgl. z. B. auch [20] oder [27]).

Ein *cauchysches Spannungsvektorfeld*

$$\vartheta : \phi(\bar{\mathfrak{B}}) \times S(2) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ist ein (stetiges, sowie stetig auf $\partial\Phi(\mathfrak{B})$ fortsetzbares) Vektorfeld. Hier steht $S(2)$ für die zweidimensionale Einheitssphäre des \mathbb{R}^3 . Sei $x \in \Phi_t(\mathfrak{B})$ ein materieller Punkt eines Körpers \mathfrak{B} und $n \in S(2)$ ein Einheitsvektor. Sei weiter $U \subset \mathfrak{B}$ ein beliebiger Teil von \mathfrak{B} , auf dessen Rand ∂U der Punkt x liegt und für den n die äußere Einheitsnormale an U im Punkt x ist. Es wird angenommen, daß auf die Oberfläche von U ein durch ϑ festgelegtes Kraftdichtefeld einwirkt. Und zwar ist der Wert des Kraftdichtefeldes im Punkt x gleich $\vartheta(x, n)$.

Das cauchysche Spannungsvektorfeld ist die gedankliche Erweiterung der Oberflächenspannung auf Teile U eines Körpers \mathfrak{B} . Dementsprechend sollen die Begriffe für den Fall $U = \mathfrak{B}$ zusammenfallen. Es soll also

$$\vartheta^\partial(x) = \vartheta(x, n)$$

gelten, falls x ein Punkt auf der Oberfläche $\partial\Phi_t(\mathfrak{B})$ von \mathfrak{B} ist und n die äußere Einheitsnormale an $\Phi_t(\mathfrak{B})$ im Punkt x ist.

Mit den auf die Teile des Körpers wirkenden Kraftgrößen b, ϑ kann nun das zweite Axiom der Kontinuumsmechanik eingeführt werden, das dem newtonschen Grundgesetz aus der Punktmassenmechanik entspricht.

Axiom 2 (Kräftebilanz) Sei Φ_t eine Bewegung eines Körpers und v_t die zugehörige räumliche Geschwindigkeit. Während dieser Bewegung wirke eine (zeitvariable) räumliche Volumenkraft $b_t : \Phi_t(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ und ein cauchyaches Spannungsvektorfeld $\vartheta_t : \Phi_t(\mathfrak{B}) \times \mathbb{S}(2) \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Das Axiom über die Kräftebilanz ist für diese Bewegung erfüllt, falls für alle Teile U von \mathfrak{B} die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{x \in \Phi_t(U)} v_t(x) \rho_t(x) dv \right) = \int_{x \in \Phi_t(U)} b_t(x) \rho_t(x) dv + \int_{x \in \partial\Phi_t(U)} \vartheta_t(x, n) da \quad (1.4)$$

gilt. Hierbei steht in dem Oberflächenintegral die Größe n wieder für die äußere Einheitsnormale an $\Phi_t(U)$ im Randpunkt $x \in \partial\Phi_t(U)$.

Die Kräftebilanz kann auch in Form einer partiellen Differentialgleichung formuliert werden. Das eröffnet einen Weg, Strukturen der Kontinuumsmechanik numerisch zu berechnen, außerdem lassen sich damit einige theoretische Aspekte leichter behandeln (zum Beispiel das Momentengleichgewicht und das Materialverhalten). Im folgenden wird schrittweise eine dem Axiom über die Kräftebilanz entsprechende partielle Differentialgleichung hergeleitet.

Für das auf der linken Seite von Gleichung (1.4) stehende Volumenintegral erhält man ein zeitlich konstantes Integrationsgebiet, wenn man von der räumlichen Integrationsvariablen x zu der materiellen Integrationsvariablen $X = \Phi_t^{-1}(x)$ wechselt

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{x \in \Phi_t(U)} v_t \rho_t(x) dv \right) = \frac{d}{dt} \left(\int_{X \in U} v_t(\Phi_t(X)) \underbrace{\rho_t(\Phi_t(X)) \det(D\Phi_t(X))}_{=\rho_{\text{ref}}(X)} dV \right).$$

Damit ist es möglich, die zeitliche Ableitung unter das Integralzeichen zu ziehen

$$\begin{aligned} \dots &= \int_{X \in U} \frac{d}{dt} v_t(\Phi_t(X)) \rho_{\text{ref}}(X) dV \\ &= \int_{X \in U} \frac{d}{dt} V_t(X) \rho_{\text{ref}}(X) dV. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Die einzige im Integranden verbleibende zeitabhängige materielle Größe ist V_t , womit die zeitliche Ableitung unter dem Integralzeichen besonders einfach wird ($\frac{d}{dt} V_t(X) = \frac{d^2}{dt^2} \Phi_t(X)$). Deshalb ist es wünschenswert, die gesamte Gleichung (1.4) für die Kräftebilanz in materielle Koordinaten zu transformieren. Dazu ist jedoch noch eine Überlegung für das auf der rechten Seite von (1.4) stehende Oberflächenintegral notwendig, die zu der weiter unten beschriebenen Piola-Transformation führt.

Da in dieser Arbeit, wie auch in [20], alle Axiome der Kontinuumsmechanik in den beobachtbaren räumlichen Größen formuliert werden, wird zunächst auch das

Integral (1.5) wieder in räumliche Größen umgeschrieben. Mit $x = \Phi_t(X)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_t(X) &= \frac{d}{dt} v_t(\Phi_t(X)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} v_t(x) + \frac{\partial}{\partial x} v_t(x) \frac{d}{dt} \Phi_t(X) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} v_t(x) + \left(\frac{\partial}{\partial x} v_t(x) \right) v_t(x). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Die Größe

$$\frac{D}{Dt} v_t(x) := \frac{\partial}{\partial t} v_t(x) + \left(\frac{\partial}{\partial x} v_t(x) \right) v_t(x)$$

wird auch als *materielle Ableitung der räumlichen Geschwindigkeit* bezeichnet. Damit läßt sich die Gleichung für die Kräftebilanz in der Form

$$\int_{x \in \Phi_t(U)} \left(\frac{D}{Dt} v_t(x) \right) \rho_t(x) dv = \int_{x \in \Phi_t(U)} b_t(x) \rho_t(x) dv + \int_{x \in \partial \Phi_t(U)} \vartheta_t(x, n) da \quad (1.7)$$

schreiben.

Stände in der letzten Gleichung anstelle des Oberflächenintegrals über $\partial \Phi_t(U)$ ein Volumenintegral über $\Phi_t(U)$, so könnte man (wie bei Gleichung (1.2)) mit dem Argument, daß die Gleichung für alle Teile U des Körpers gültig sein soll, zu einer partiellen Differentialgleichung übergehen.

Zur Umwandlung des Oberflächenintegrals in ein Volumenintegral bietet sich der gaußsche Integralsatz an. Um den gaußschen Satz anwenden zu können, müssen sich jedoch die Komponenten von $\vartheta_t(x, n)$ als Skalarprodukt eines Vektorfeldes $c_t(x)$ mit dem Einheitsvektor $n \in S(2)$ im Punkt x darstellen lassen. Genau das sichert der folgende Satz von Cauchy.

Satz 1 (von Cauchy) *Auf stückweise glatt berandetem und beschränktem Gebiet \mathcal{G} seien zwei stetige Funktionen $a : \mathcal{G} \times S(2) \rightarrow \mathbb{R}$ und $b : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ so gegeben, daß für alle Teile U von \mathcal{G} die Integralgleichung*

$$\int_{x \in U} b(x) dv = \int_{x \in \partial U} a(x, n) da$$

gelte, wobei n die äußere Einheitsnormale an U in $x \in \partial U$ sei. Dann existiert genau ein Vektorfeld $c : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$, so daß $a(x, n) = \langle c(x), n \rangle$ gilt (für alle $x \in \mathcal{G}$ und $n \in S(2)$).

In vielen Büchern (z. B. [7]) über Kontinuumsmechanik werden die für den Beweis dieses Satzes notwendigen Grenzübergänge unterdrückt. In [20] kann ein vollständiger Beweis relativ unabhängig vom Rest des Buches nachgelesen werden. Die grundlegende Technik deutet sich in dem weiter unten ausgeführten Beweis über die Piola-Transformation an.

Der Satz von Cauchy kann mittels Gleichung (1.7) auf die Komponenten $\vartheta_i(x, n)$ ($i = 1, 2, 3$) eines cauchyschen Spannungsvektorfeldes ϑ angewandt werden. Man erhält für jede Komponente ein Vektorfeld $c_i(x)$, so daß $\vartheta_i(x, n) = \langle c_i(x), n \rangle = c_i(x)^\top \cdot n$ gilt. Darauf aufbauend wird der *cauchysche Spannungstensor* σ als (vom Raumpunkt $x \in \Phi(\mathcal{B})$ abhängige) 3×3 -Matrix eingeführt. Und zwar sei die i -te Zeile von σ durch

$$\sigma_{i\bullet}(x) := c_i^\top(x)$$

gegeben. Damit besteht zwischen dem cauchyschen Spannungsvektorfeld $\vartheta(x, n)$ und dem cauchyschen Spannungstensor $\sigma(x)$ die Beziehung

$$\vartheta(x, n) = \sigma(x) \cdot n.$$

Hierbei steht der Punkt „ \cdot “ für die übliche Matrix-Vektor-Multiplikation. (Im Rahmen dieser Arbeit kann man den Begriff „Tensor“ meist als „Matrix“ lesen. Ist dies an einer Stelle nicht ohne weiteres möglich, so wird dort darauf eingegangen. Für eine auf der Tensoranalysis aufbauende Beschreibung der Kontinuumsmechanik sei der Leser auf [20] verwiesen.)

Wie schon erwähnt, gestattet es der cauchysche Satz, den gaußschen Integralsatz auf das Oberflächenintegral in Gleichung (1.4) anzuwenden. Zunächst soll das nur für eine Komponente i ($i = 1, 2, 3$) von $\vartheta(x)$ geschehen:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Phi_t(U)} \vartheta_i(x, n) \, da &= \int_{\partial\Phi_t(U)} c_i(x)^\top n \, da \\ &= \int_{\Phi_t(U)} (\operatorname{div} c_i)(x) \, dv. \end{aligned}$$

Die drei Gleichungen für die Komponenten von ϑ werden dann zur Gleichung

$$\int_{x \in \partial\Phi_t(U)} \vartheta(x, n) \, da = \int_{x \in \Phi_t(U)} (\operatorname{div} \sigma)(x) \, dv \quad (1.8)$$

zusammengefaßt, wobei das Vektorfeld $(\operatorname{div} \sigma) : \Phi_t(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$(\operatorname{div} \sigma)_i := \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \quad (1.9)$$

definiert sei.

Ersetzt man in der Gleichung (1.7) für die Kräftebilanz das Oberflächenintegral durch die rechte Seite von (1.8), so erhält man die Gleichung

$$\int_{x \in \Phi_t(U)} \frac{D}{Dt} v_t(x) \rho_t(x) \, dv = \int_{x \in \Phi_t(U)} b_t(x) \rho_t(x) \, dv + \int_{x \in \Phi_t(U)} (\operatorname{div} \sigma_t)(x) \, dv,$$

in der nur noch Volumenintegrale über $\Phi_t(U)$ stehen. Da die Gleichung für jeden Teil U des Körpers gültig sein soll, müssen die Integranden übereinstimmen, und es ergibt sich für die Kräftebilanz die partielle Differentialgleichung

$$\frac{D}{Dt} v_t(x) \rho_t(x) = b_t(x) \rho_t(x) + (\operatorname{div} \sigma_t)(x) \quad \forall x \in \Phi_t(\mathfrak{B}). \quad (1.10)$$

In der Punktmassenmechanik resultiert die Drehmomentenbilanz aus einem ersten Integral der Newtonschen Bewegungsgleichung (also der Kräftebilanz). In der Kontinuumsmechanik muß die Drehmomentenbilanz als ein eigenständiges Axiom eingeführt werden (Siehe hierzu auch [20]. Eine mehr philosophische Betrachtung dieses Thema ist in [8] zu finden).

Axiom 3 (Drehmomentenbilanz) Sei Φ_t eine Bewegung eines Körpers \mathfrak{B} , und wirke auf diesen Körper die massebezogene Volumenkraft b_t und das cauchy'sche Spannungsvektorfeld ϑ_t . Dann ist das Axiom über die Drehmomentenbilanz erfüllt, falls für alle Teile U von \mathfrak{B} die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x \in \Phi_t(U)} [x, v_t(x)] \rho_t(x) dv \\ = \int_{x \in \Phi_t(U)} [x, b_t(x)] \rho_t(x) dv \\ + \int_{x \in \partial \Phi_t(U)} [x, \vartheta_t(x, n)] da \quad (1.11) \end{aligned}$$

gilt.

Es zeigt sich, daß sich aus der Drehmomentenbilanz eine wichtige Eigenschaft für den cauchy'schen Spannungstensor ergibt, nämlich die Symmetrie des cauchy'schen Spannungstensors. Es gilt sogar noch mehr:

Satz 2 (Symmetrie des cauchy'schen Spannungstensors) Sei Φ_t eine Bewegung eines Körpers \mathfrak{B} und wirke auf den Körper die Volumenkraft b_t und die Oberflächenspannung ϑ_t^∂ . Weiter sei σ_t das zu ϑ_t gehörige cauchy'sche Spannungstensorfeld. Dann gilt das Axiom über die Drehmomentenbilanz genau dann, wenn σ_t symmetrisch ist. (Hierbei wird selbstverständlich das Axiom über die Kräftebilanz vorausgesetzt.)

Da dies für mich eine überraschende Aussage war, möchte ich hier den Beweis dieses Satzes wiedergeben.

Beweis: Zunächst wird wieder das Integral auf der linken Seite der Gleichung (1.11) der Momentenbilanz in materiellen Größen geschrieben, um die Zeitableitung unter das Integralzeichen ziehen zu können

$$\frac{d}{dt} \int_{x \in \Phi_t(U)} [x, v_t(x)] \rho_t(x) dv = \int_{X \in U} \frac{d}{dt} [\Phi_t(X), V_t(X)] \rho_{\text{ref}}(X) dV. \quad (1.12)$$

Beachtet man, daß $[\frac{d}{dt} \Phi_t(X), V_t(X)] = [V_t(X), V_t(X)] = 0$ gilt, so erhält man die rechte Seite von (1.12) zu

$$\int_{X \in U} \left[\Phi_t(X), \frac{d}{dt} V_t(X) \right] \rho_{\text{ref}}(X) dV.$$

Zurückübertragen in räumliche Größen, lautet dieser Term

$$\int_{x \in \Phi_t(U)} \left[x, \frac{D}{Dt} v_t(x) \right] \rho_t(x) dv. \quad (1.13)$$

Weiterhin ist das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial \Phi_t(U)} [x, \sigma_t(x) \cdot n] da \quad (1.14)$$

auf der rechten Seite der Gleichung (1.11) für die Drehmomentenbilanz in ein Volumenintegral umzuwandeln. Das Produkt $\sigma_t(x) \cdot n$ ist die durch die Komponenten

von n gewichtete Summe der Spalten von $\sigma_t(x)$, also

$$\left[x, \sum_{j=1}^3 \sigma_{\bullet j} n_j \right].$$

Beachtet man die Bilinearität des Vektorproduktes $[\bullet, \bullet]$, so erkennt man, daß es sinnvoll ist, eine 3×3 -Matrix $[x, \sigma_t(x)]$ durch spaltenweise Ausführung des Vektorproduktes, also durch $[x, \sigma_t(x)]_{\bullet j} := [x, \sigma_{\bullet j}]$ zu definieren. Mit dieser Matrix läßt sich das Oberflächenintegral (1.14) in der Form

$$\int_{\partial\Phi_t(U)} [x, \sigma_t(x)] \cdot n \, da$$

schreiben und mittels des gaußschen Integralsatzes in das Volumenintegral

$$\int_{\Phi_t(U)} \operatorname{div}([x, \sigma_t(x)]) \, dv$$

umformen. Bleibt $\operatorname{div}([x, \sigma_t(x)])$ gemäß (1.9) zu berechnen.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}([x, \sigma_t(x)])_i &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [x, \sigma_t(x)]_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_j} x, \sigma_t(x) \right]_{ij} + \left[x, \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_t(x) \right]_{ij} \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 [e_j, \sigma_t(x)]_{ij} \right) + \left[x, \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_t(x)_{\bullet j} \right]_i \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 [e_j, \sigma_t(x)]_{ij} \right) + [x, (\operatorname{div} \sigma_t)(x)]_i \end{aligned}$$

Hierbei steht e_j für den j -ten Einheitsvektor der kanonischen Basis. Mit der letzten Gleichung und mit Gleichung (1.13) läßt sich nun die Gleichung für die Drehmomentenbilanz in der Form

$$\int_{x \in \Phi_t(U)} \left(\left[x, \left(\frac{D}{Dt} v_t(x) \right) \rho_t(x) - b_t(x) \rho_t(x) - (\operatorname{div} \sigma_t)(x) \right] - \sum_{j=1}^3 [e_j, \sigma_{\bullet j}] \right) \, dv = 0 \quad (1.15)$$

schreiben. Aufgrund der partiellen Differentialgleichung (1.10) für die Kräftebilanz ist jedoch der im ersten Vektorprodukt auftretende Term $\frac{D}{Dt} v_t(x) \rho_t(x) - b_t(x) \rho_t(x) - (\operatorname{div} \sigma_t)(x)$ gleich Null. Somit ist die Gleichung (1.15) genau dann für alle Teile U von \mathfrak{B} erfüllt, falls

$$0 = \sum_{j=1}^3 [e_j, \sigma_{\bullet j}] = (\sigma_{32} - \sigma_{23}, \quad \sigma_{13} - \sigma_{31}, \quad \sigma_{21} - \sigma_{12})$$

für alle $x \in \Phi_t(U)$ gilt. Das ist offensichtlich äquivalent zur Symmetrie von $\sigma_t(x)$ ($\forall x \in \mathfrak{B}$). \square

Schon weiter oben wurde bemerkt, daß die zeitliche Ableitung, die in der linken Seite der Gleichung der Kräftebilanz auftritt, eine besonders einfache Form annimmt, wenn die Kräftebilanz in materiellen Größen aufgestellt wird. Jedoch blieb noch zu klären, wie das Oberflächenintegral auf der rechten Seite der Gleichung für die Kräftebilanz in materielle Größen zu übertragen ist. Das Werkzeug dazu ist der folgende Satz.

Satz 3 (über die Piola-Transformation) Sei \mathfrak{B} ein Gebiet des \mathbb{R}^3 , $\Phi : \mathfrak{B} \rightarrow \Phi(\mathfrak{B}) \subset \mathbb{R}^3$ ein Diffeomorphismus mit $\det(D\Phi) > 0$ und $w : \Phi(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Dann existiert genau ein stetiges Vektorfeld $W : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$, so daß für alle orientierten, regulären Flächen (A, N) ($A \subset \mathfrak{B}$, und N stetiges Einheitsnormalenfeld auf U) die Gleichung

$$\int_{\Phi(A)} \langle w, n \rangle da = \int_A \langle W, N \rangle dA \quad (1.16)$$

gilt, wobei n dasjenige Einheitsnormalenfeld auf $\Phi(A)$ sei, für das $\langle n, D\Phi(X)N \rangle > 0$ gilt.

Da in dem Beweis zu diesem Satz in einfacher Form auch eine Technik auftritt, die für den Beweis des Satzes von Cauchy genutzt werden kann, soll dieser hier exemplarisch dargestellt werden.

Beweis: Zunächst wird gezeigt, daß das Vektorfeld W eindeutig ist, falls es existiert. Dazu sei $X \in \mathfrak{B}$ beliebig. Es wird eine Folge $A_k := \{X + X' \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < X'_1, X'_2 < \frac{1}{k}\}$ (für $k \in \mathbb{N}$, hinreichend groß) von Flächen mit den Flächennormalen $N_k = (1, 0, 0)$ betrachtet. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} k^2 \int_{A_k} \langle W, N \rangle dA &= \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k^2 \int_0^{\frac{1}{k}} \int_0^{\frac{1}{k}} (W_1(X) + W_1(X + X') - W_1(X)) dX'_3 dX'_2 \\ &= W_1(X) + \lim_{k \rightarrow \infty} k^2 \underbrace{\int_0^{\frac{1}{k}} \int_0^{\frac{1}{k}} (W_1(X + X') - W_1(X)) dX'_3 dX'_2}_{|\dots| \leq \max_{0 < X'_2, X'_3 < \frac{1}{k}} |W_1(X + X') - W_1(X)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)} \\ &= W_1(X) \end{aligned} \quad (1.17)$$

aufgrund der Stetigkeit von W . Analog wird der Grenzwert des auf der linken Seite von Gleichung (1.16) stehenden Oberflächenintegrals für $A := A_k$ mit $k \rightarrow \infty$ ermittelt.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} k^2 \int_{\Phi(A_k)} \langle w, n \rangle da &= \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k^2 \int_0^{\frac{1}{k}} \int_0^{\frac{1}{k}} \det \left(w(\Phi(X + X')), \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} \Big|_{X+X'}, \frac{\partial \Phi}{\partial X_3} \Big|_{X+X'} \right) dX_2 dX_3 \\ &= \det \left(w(\Phi(X)), \frac{\partial \Phi}{\partial X_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial X_3} \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Dabei wurde die Formel für die Integration über zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^3 genutzt, wie sie zum Beispiel in [17] beschrieben ist. Da Gleichung

(1.16) für alle Flächen A_k gültig sein soll, müssen auch die Grenzwerte (1.17) und (1.18) übereinstimmen,

$$W_1(X) = \det \left(w(\Phi(X)), \frac{\partial \Phi}{\partial X_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial X_3} \right).$$

Analog ergeben sich die anderen Komponenten

$$\begin{aligned} W_2(X) &= \det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_1}, w(\Phi(X)), \frac{\partial \Phi}{\partial X_3} \right), \\ W_3(X) &= \det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial X_2}, w(\Phi(X)) \right). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen entsprechen gerade der Cramer-Regel für die Auflösung des linearen Gleichungssystems $w(\Phi(X)) = \frac{1}{\det(D\Phi(X))} D\Phi(X)W(X)$ nach $W(X)$ und lassen sich auch in der Form

$$W(X_0) = \det(D\Phi(X_0)) (D\Phi(X_0))^{-1} w(\Phi(X_0)) \quad (1.19)$$

schreiben. Das bedeutet, daß das Vektorfeld W eindeutig durch w bestimmt ist.

Die Existenz des Vektorfeldes W bei gegebenem w weist man nach, indem man die Gleichung (1.19) als definierende Gleichung für W nutzt und mittels Transformation der Integrationsvariablen zeigt, daß dann Gleichung (1.16) für beliebige reguläre orientierte Flächen (A, N) erfüllt ist. \square

Das durch die Bedingung (1.16) bzw. durch die Gleichung (1.19) festgelegte Vektorfeld W heißt auch *Piola-Transformierte* von w , und der Übergang von w nach W wird auch als *Piola-Transformation* bezeichnet.

Mittels der Piola-Transformation ist es möglich das Oberflächenintegral

$$\int_{x \in \partial \Phi_t(U)} \sigma_t(x) \cdot n \, da \quad (1.20)$$

aus der Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{x \in \Phi_t(U)} v_t(x) \rho_t(x) \, dv = \int_{x \in \Phi_t(U)} b_t(x) \rho_t(x) \, dv + \int_{x \in \partial \Phi_t(U)} \sigma_t(x) \cdot n \, da \quad (1.21)$$

für die Kräftebilanz (1.4) in materiellen Größen zu schreiben, die den Wert des Integrals erhalten. Dabei ist zu beachten, daß in (1.20) die für das Skalarprodukt notwendige Transposition schon ausgeführt ist ($\sigma_{1\bullet} \cdot n = \langle \sigma_{1\bullet}^\top, n \rangle$). Die erste Komponente von (1.20) lautet

$$\int_{x \in \partial \Phi_t(U)} \langle (\sigma_{1\bullet}(x))^\top, n \rangle \, da.$$

Die Piola-Transformation ergibt also ein Vektorfeld

$$(P_{1\bullet}(X))^\top = \det(D\Phi_t(X)) (D\Phi_t(X))^{-1} (\sigma_{1\bullet}(\Phi_t(X)))^\top.$$

Diese Gleichung transponiert und für alle Komponenten $i = 1, 2, 3$ geschrieben, ergibt die Piola-Transformierte des cauchyschen Spannungstensors

$$P_i(X) := \sigma_t(\Phi_t(X)) (D\Phi_t)^{-\top} \det(D\Phi_t),$$

die auch als *erster Piola-Kirchhoff-Tensor* bezeichnet wird. Mit Hilfe des ersten Piola-Kirchhoff-Tensors kann man das *materielle Spannungsvektorfeld*

$$\Theta_t(X, N) := P_t(X)N \quad (X \in \bar{\mathfrak{B}}, N \in \mathbb{S}(2))$$

und zugehörig die materielle Oberflächenspannung

$$\Theta_t^\partial(X) := \Theta_t(X, N) \quad (N \text{ äußere Einheitsnormale an } \mathfrak{B} \text{ im Punkt } X \in \partial\mathfrak{B})$$

eingeführen. Anschaulich gesprochen, beschreibt das materielle Spannungsfeld die auf ein materielles Flächenelement $A \subset \mathfrak{B}$ mit Flächennormale N bezogene räumliche Kraft, die auf das zu A gehörige räumliche Flächenelement $\Phi_t(A)$ wirkt.

Mit dem ersten Piola-Kirchhoff-Tensor und mit der (*massebezogenen*) *materiellen Volumenkraft*

$$B_t(X) := b_t(\Phi_t(X))$$

besagt die Kräftebilanz (1.21), daß für alle Teile U eines Körpers die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{X \in U} V_t(X) \rho_{\text{ref}}(X) dV = \int_{X \in U} B_t(X) \rho_{\text{ref}}(X) dV + \int_{X \in \partial U} P_t(X) \cdot N dA$$

gilt. Hineinziehen der zeitlichen Ableitung auf der linken Seite der Gleichung und Umwandeln des Oberflächenintegrals auf der rechten Seite der Gleichung in ein Volumenintegral liefert (zusammen mit der Beliebigkeit von U) die Kräftebilanz in Form der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt} V_t(X) \rho_{\text{ref}}(X) = B_t(X) \rho_{\text{ref}}(X) + (\text{div } P_t)(X). \quad (1.22)$$

Das ist die zentrale Gleichung, die das physikalische Verhalten elastischer Körper in materiellen Größen beschreibt. Sie ist wichtig, da Materialgesetze im Rahmen dieser Arbeit nur in materiellen Größen beschrieben werden können. Sie wird im folgenden auch als *Bewegungsgleichung* elastischer Körper bezeichnet.

Die Piola-Transformierte P_t des cauchyschen Spannungstensors muß auch bei geltender Momentenbilanz nicht unbedingt symmetrisch sein. Aus dem ersten Piola-Kirchhoff-Tensor P_t erhält man jedoch einen symmetrischen materiellen Tensor, wenn man den für eine Normale N resultierenden materiellen Spannungsvektor $\Theta_t(X, N) = P_t(X) \cdot N$ ebenfalls in die materiellen Koordinaten transformiert

$$D\Phi(X)^{-1} \Theta_t(X, N) = D\Phi(X)^{-1} \cdot P_t(X) \cdot N.$$

Der zugehörige Tensor

$$S_t(X) := D\Phi(X)^{-1} P_t(X) = D\Phi(X)^{-1} \sigma_t(\Phi_t(X)) D\Phi(X)^{-T} \det(D\Phi(X))$$

heißt *zweiter Piola-Kirchhoff-Tensor* und hat für die Behandlung der Materialgesetze von Kontinua Bedeutung. Er ist offensichtlich genau dann symmetrisch, wenn $\sigma_t(X)$ symmetrisch ist, also die Drehmomentenbilanz erfüllt ist.

Zur Beschreibung der in einem Körper \mathfrak{B} gespeicherten elastischen Energie wird eine neue Größe, die (*massebezogene*) *räumliche Energiedichte*, als ein stetiges Skalarfeld $e_t : \Phi_t(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ eingeführt. (Wie alle übrigen Größen sei auch e_t stetig nach dem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar.) Für die Diskussion der Materialeigenschaften von Körpern ist das folgende Axiom wesentlich.

Axiom 4 (Leistungsbilanz) Sei Φ_t eine Bewegung eines Körpers \mathfrak{B} . Auf diesen Körper wirke die räumliche Volumenkraft b_t und das cauchy'sche Spannungsvektorfeld ϑ_t . Außerdem sei e_t die räumliche Energiedichte des Körpers. Dann sei das Axiom über Leistungsbilanz erfüllt, falls für jeden Teil U von \mathfrak{B} die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x \in \Phi_t(U)} \left(e_t(x) + \frac{1}{2} \langle v_t(x), v_t(x) \rangle \right) \rho_t(x) dv = \\ \int_{x \in \Phi_t(U)} \langle v_t(x), b_t(x) \rangle \rho_t(x) dv \\ + \int_{x \in \partial \Phi_t(U)} \langle v_t(x), \vartheta_t(x, n) \rangle da \quad (1.23) \end{aligned}$$

erfüllt ist. Hierbei bezeichnet n wieder die äußere Einheitsnormale an $\Phi_t(U)$ im Punkt $x \in \partial \Phi_t(U)$.

Zu bemerken ist, daß in Büchern der Elastizitätstheorie (wie z. B. [7] und [20]) in der Leistungsbilanz auch thermische Effekte berücksichtigt werden. Dies würde aber im Rahmen dieser Arbeit zu weit gehen.

Wichtig ist die Leistungsbilanz in materiellen Größen. Der Übergang von räumlichen zu materiellen Größen wird wie bei der Gleichung für die Kräftebilanz vollzogen. Die Piola-Transformierte des Integranden des Oberflächenintegrals in Gleichung (1.23) ergibt sich zu

$$v_t(\Phi_t(X))^T \sigma_t(\Phi_t(X)) \cdot (D\Phi_t(X))^{-T} \det(D\Phi_t(X)) = V_t(X)^T P_t(X).$$

Führt man noch die (massebezogene) materielle Energiedichte $E_t(X) := e_t(\Phi_t(X))$ ein, so kann man die Gleichung (1.23) für die Leistungsbilanz vollständig in materiellen Größen schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{X \in U} \left(E_t(X) + \frac{1}{2} \langle V_t(X), V_t(X) \rangle \right) \rho_{\text{ref}}(X) dV \\ = \int_{X \in U} B_t(X) \rho_{\text{ref}}(X) dV + \int_{X \in \partial U} \langle V_t, P_t(X) \cdot N \rangle dA. \end{aligned}$$

Nach Hineinziehen der zeitlichen Ableitung in das Integral auf der linken Seite und Umwandlung des Oberflächenintegrals in das zugehörige Volumenintegral, kann man aus dieser für alle Teile U von \mathfrak{B} gültigen Gleichung die zur Leistungsbilanz äquivalente partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ref}}(X) \frac{d}{dt} E_t(X) + \left\langle V_t(X), \rho_{\text{ref}}(X) \frac{d}{dt} V_t(X) \right\rangle = \\ \langle V_t(X), \rho_{\text{ref}}(X) B_t(X) \rangle + \text{div}(\langle V_t, P_t \rangle)(X) \quad (1.24) \end{aligned}$$

ablesen.

Unter Voraussetzung der Gültigkeit der Kräftebilanz läßt sich diese Gleichung mit Hilfe der partiellen Differentialgleichung (1.22) vereinfachen. Dazu wird zunächst

der in (1.24) auftretende Term $\operatorname{div}(\langle V_t, P_t \rangle)(X)$ weiter ausgerechnet.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(V_t^\top \cdot P_t) &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_i} (V_j P_{ji}) \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial V_j}{\partial X_i} P_{ji} + V_j \frac{\partial}{\partial X_i} P_{ji} \\ &= \frac{d}{dt} F_t(X) : P_t(X) + \langle V_t(X), (\operatorname{div} P_t)(X) \rangle. \end{aligned}$$

Hierbei steht der Doppelpunkt „:“ für das Skalarprodukt zweier Matrizen

$$A : B := \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}.$$

Diese Notation ist zum Beispiel in [20] als zweifache Kontraktion von Tensoren zu finden. Nach Einsetzen des eben berechneten Terms kann man Gleichung (1.24) in der Form

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ref}}(X) \frac{d}{dt} E_t(X) \\ + \left\langle V_t(X), \rho_{\text{ref}}(X) \frac{d}{dt} V_t(X) - \rho_{\text{ref}}(X) B_t(X) - \operatorname{div}(P_t)(X) \right\rangle = \\ \frac{d}{dt} F_t(X) : P_t(X) \end{aligned}$$

schreiben.

Das Skalarprodukt

$$\left\langle V_t(X), \rho_{\text{ref}}(X) \frac{d}{dt} V_t(X) - \rho_{\text{ref}}(X) B_t(X) - \operatorname{div}(P_t)(X) \right\rangle$$

verschwindet aufgrund der Gleichung (1.22) für die Kräftebilanz. Übrig bleibt die Gleichung

$$\rho_{\text{ref}}(X) \frac{d}{dt} E_t(X) = \frac{d}{dt} F_t(X) : P_t(X), \quad (1.25)$$

deren Gültigkeit zum Axiom über die Energiebilanz äquivalent ist, wenn man die Kräftebilanz voraussetzt.

1.1.3 Materialgesetz

Die zentrale Gleichung der Elastizitätstheorie ist die Bewegungsgleichung

$$\rho_{\text{ref}}(X) \frac{d^2}{dt^2} \Phi_t(X) = B_t(X) \rho_{\text{ref}}(X) + (\operatorname{div} P_t)(X),$$

die eine Relation zwischen der auf den Körper einwirkenden Volumenkraft B_t , der Bewegung Φ_t des Körpers und dem ersten Piola-Kirchhoff-Tensor P_t beschreibt. Die Momentenbilanz schränkt die Wahl des ersten Piola-Kirchhoff-Tensors P_t ein, denn der zweite Piola-Kirchhoff-Tensor

$$D\Phi_t^{-1} P_t = S_t$$

ist symmetrisch. Dennoch ist $P_t(X)$ dadurch noch nicht festgelegt. Erst die Materialgesetze klären den Zusammenhang zwischen der Bewegung Φ_t und Piola-Kirchhoff-Tensoren. Einen plausiblen Zugang zu den Materialgesetzen liefert die Leistungsbilanz in der Form von Gleichung (1.25).

In der Kontinuumsmechanik wird davon ausgegangen, daß der Zustand eines Körpers zum Zeitpunkt t schon eindeutig durch seine Bewegung $\Phi_{t'}$ ($t' \leq t$) bis zum Zeitpunkt t bestimmt wird. Weiterhin wird davon ausgegangen, daß die Energiedichte des Körpers durch den Zustand des Körpers und die Zeit festgelegt ist.

In der Elastizitätstheorie schränkt man sich weiter ein. Man geht davon aus, daß die Energiedichte nicht explizit von der Zeit abhängig ist, das heißt, daß das Material nicht altert. Weiterhin geht man davon aus, daß die Energiedichte zum Zeitpunkt t nur von der Plazierung Φ_t des Körpers zum Zeitpunkt t und nicht von der Vorgeschichte $\Phi_{t'}$ mit $t' < t$ abhängig ist, das heißt, daß keine plastischen, sondern nur elastische Verformungen auftreten.

Man nimmt also an, daß es eine durch das Material bestimmte Funktion \hat{E} gibt, die jeder Plazierung Φ_t zu einer Zeit t eine Energiedichte E_t zum gleichen Zeitpunkt zuordnet

$$E_t = \hat{E}(\Phi_t).$$

Die Funktion \hat{E} selber ist unabhängig von der Zeit.

Weiterhin setzt man voraus, daß für \hat{E} das folgende *Lokalitätsprinzip* gilt.

Axiom 5 (Lokalitätsprinzip) Sind zwei Plazierungen Φ und $\bar{\Phi}$ eines Körpers \mathfrak{B} in einer Umgebung eines Punktes $X \in \mathfrak{B}$ gleich, so verursachen sie in X die gleiche Energiedichte, d. h. es gilt $\hat{E}(\Phi)(X) = \hat{E}(\bar{\Phi})(X)$.

Durchaus überraschend ist, daß aus diesen Voraussetzungen und der Gleichung (1.25) für die Leistungsbilanz schon folgt, daß die Energiedichtefunktion \hat{E} eines Körpers \mathfrak{B} nur von der Jacobi-Matrix $D\Phi$ der Plazierung Φ des Körpers abhängen kann.

Das erklärt die große Bedeutung die den Jacobi-Matrizen von Plazierungen im Rahmen der Elastizitätstheorie zukommt. Deshalb bekommen diese auch einen eigenen Namen. Zu einer gegebenen Plazierung Φ eines Körpers wird

$$F := D\Phi$$

als *Deformationsgradient* von Φ bezeichnet.

Aus dem Lokalitätsprinzip und der Leistungsbilanz folgt sogar noch eine stärkere Aussage.

Stimmen die Deformationsgradienten $F_0(X) = D\Phi_0(X)$ und $F_1(X) = D\Phi_1(X)$ zweier Plazierungen Φ_0 und Φ_1 eines Körpers \mathfrak{B} in einem Punkt $X \in \mathfrak{B}$ überein, so sind auch die Energiedichten $E_0(X) = \hat{E}(\Phi_0)(X)$ und $E_1(X) = \hat{E}(\Phi_1)(X)$ in diesem Punkt gleich.

Das sieht man wie folgt. Durch

$$\Phi_t(X') := (1 - t)\Phi_0(X') + t\Phi_1(X') \quad (t \in \mathbb{R}, X' \in \mathfrak{B})$$

ist eine Bewegung Φ_t des Körpers \mathfrak{B} mit $F_t(X) = F_0(X)$ ($t \in \mathbb{R}$) gegeben. Für diese Bewegung gilt $\frac{d}{dt}F_t(X) = 0$. Damit folgt aus der Gleichung (1.25) für die Leistungsbilanz

$$\frac{d}{dt} \left(\hat{E}(\Phi_t)(X) \right) = 0.$$

Integriert man nun über die Zeit t von 0 bis 1, so erhält man wie behauptet

$$\hat{E}(\Phi_1)(X) - \hat{E}(\Phi_0)(X) = 0.$$

Die materielle Energiedichte E eines Körpers \mathfrak{B} läßt sich also mit einer durch das Material bestimmten Funktion $\hat{E} : \mathfrak{B} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Gleichung

$$E(X) = \hat{E}(X, F(X))$$

darstellen. Das Wesentliche daran ist, daß \hat{E} nur noch eine Funktion des materiellen Punktes X und des Deformationsgradienten $F(X)$ an der Stelle X ist. (Korrekterweise müßte man für diese Energiedichtefunktion in Abhängigkeit der neuen Argumente auch einen neuen Bezeichner einführen. Um die Übersichtlichkeit zu bewahren, soll jedoch hier wie in [20] (nicht ganz formal korrekt) für die Energiedichtefunktion immer der Bezeichner \hat{E} beibehalten werden.)

Unter der Voraussetzung des Lokalisierungsprinzips legt die Energiedichtefunktion \hat{E} eines Körpers schon den Zusammenhang zwischen seinen Bewegungen und den zugehörigen Piola-Kirchhoff-Tensoren fest. Das heißt, durch sie ist das Materialverhalten des Körpers schon vollständig beschrieben.

Die Energiedichte $E(X) = \hat{E}(X, F_t(X))$ hängt nur noch über den Deformationsgradienten F_t von der Zeit ab. Die zeitliche Ableitung der Energiedichte ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{E}(X, F_t(X)) &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \hat{E}}{\partial F_{ij}}(X, F_t(X)) \frac{d}{dt} F_{ij}(X) \\ &= \frac{\partial \hat{E}}{\partial F}(X, F_t(X)) : \frac{d}{dt} F_t(X). \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Gleichung (1.25) für die Leistungsbilanz ein, so erhält man die Gleichung

$$\rho_{\text{ref}}(X) \frac{\partial \hat{E}}{\partial F}(X, F_t(X)) : \frac{d}{dt} F_t(X) = P_t(X) : \frac{d}{dt} F_t(X),$$

die für alle Bewegungen Φ_t und somit für alle $F_t(X)$ gelten soll. Daraus folgt die Gleichung

$$P_t(X) = \rho_{\text{ref}}(X) \frac{\partial \hat{E}}{\partial F}(X, F_t(X)), \quad (1.26)$$

durch die jeder Bewegung der zugehörige erste Piola-Kirchhoff-Tensor zuordnet wird. Durch das Materialverhalten wird mittels Gleichung (1.26) eine Funktion $\hat{P} : \mathfrak{B} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ festgelegt, mit der sich der erste Piola-Kirchhoff-Tensor $P_t(X)$ in einem materiellen Punkt $X \in \mathfrak{B}$ in Abhängigkeit von X und dem Deformationsgradienten $F_t(X)$ in diesem Punkt ausdrücken läßt

$$P_t(X) = \hat{P}(X, F_t(X)).$$

Damit ist das am Anfang des Abschnittes gestellte Ziel erreicht, den ersten Piola-Kirchhoff-Tensor $P_t(X)$ für einen Körper \mathfrak{B} als materialabhängige Funktion der Bewegung Φ_t des Körpers darzustellen. Im folgenden werden die Eigenschaften dieser funktionalen Abhängigkeit näher untersucht.

In die genauere Beschreibung des Materialverhaltens fließt als Erfahrungstat-
sache die im folgenden als Axiom formulierte Invarianz der Energiedichtefunktion
gegenüber Starrkörpermodifikationen ein.

Man sagt, zwei Plazierungen Φ und $\bar{\Phi}$ eines Körpers \mathfrak{B} unterscheiden sich höch-
stens durch eine *Starrkörpermodifikation*, wenn es eine orientierungserhaltende Iso-
metrie Ψ des \mathbb{R}^3 gibt, so daß $\Phi = \Psi \circ \bar{\Phi}$ gilt. Die Isometrien des \mathbb{R}^3 sind die ab-
standserhaltenden Abbildungen des \mathbb{R}^3 , also alle Kompositionen von Verschiebun-
gen, Drehungen und Spiegelungen. Bei Starrkörpermodifikationen werden durch die
Forderung nach der Erhaltung der Orientierung die Spiegelungen ausgeschlossen. Je-
de Starrkörpermodifikation Ψ läßt sich also mit einem Verschiebungsvektor r und
mit einer orthogonalen Matrix Q mit $\det Q = +1$ in der Form

$$\Psi(x) = r + Qx \quad (1.27)$$

darstellen. (Orthogonale Matrizen Q mit $\det Q = +1$ werden auch *Drehmatrizen* ge-
nannt. Eine etwas ausführlichere Behandlung von Drehmatrizen erfolgt im Abschnitt
1.2 im Zusammenhang mit dem Wechsel von Bezugssystemen.)

Unterscheiden sich zwei Plazierungen $\Phi, \bar{\Phi}$ höchstens durch eine Starrkörper-
modifikation, so sind für zwei beliebig gewählte materielle Punkte $X_1, X_2 \in \mathfrak{B}$ die
Abstände $\|\Phi(X_1) - \Phi(X_2)\|$ und $\|\bar{\Phi}(X_1) - \bar{\Phi}(X_2)\|$ der zugehörigen räumlichen
Punkte bei beiden Plazierungen gleich. Damit beschreiben diese Plazierungen den
gleichen Deformationszustand. Nur die Lage des Körpers im Raum kann sich bei
diesen zwei Plazierungen unterscheiden.

Axiom 6 (Invarianz gegenüber Starrkörpermodifikationen) *Seien Φ und $\bar{\Phi}$ zwei beliebige Plazierungen eines Körpers \mathfrak{B} , die sich höchstens durch eine Starrkörpermodifikation unterscheiden. Dann ergeben sich für Φ und $\bar{\Phi}$ gleiche Energiedichten*

$$\hat{E}(\Phi) = \hat{E}(\bar{\Phi}).$$

Die Invarianz gegenüber Starrkörpermodifikationen ist eine der wesentlichen Vor-
aussetzungen, die es ermöglichen, lineare FEM-Gleichungen, die bzgl. eines Inerti-
alsystems aufgestellt worden sind, in lineare FEM-Gleichungen bzgl. eines beschleunig-
ten Bezugssystems zu übertragen.

Ein Maß für die Deformation des Körpers \mathfrak{B} mit dem man von der Lage des
Körpers im Raum abstrahieren kann, ist der für eine Platzierung Φ durch

$$C(X) := F(X)^T F(X) = D\Phi(X)^T D\Phi(X)$$

definierte *Deformationstensor* $C : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Interessanterweise gilt nämlich der
folgende Satz.

Satz 4 (über den Deformationstensor) *Zwei Plazierungen Φ und $\bar{\Phi}$ unter-
scheiden sich genau dann höchstens durch eine Starrkörpermodifikation, falls ihre
Deformationstensoren C und \bar{C} gleich sind.*

Beweis: Daß für zwei Plazierungen Φ und $\bar{\Phi}$, die sich höchstens durch eine Starrkörper-
modifikation $\Psi(x) = r + Qx$ unterscheiden, die Deformationstensoren gleich sind,

ist leicht aus folgenden Zeilen ersichtlich.

$$\begin{aligned}
\bar{C} &= D\bar{\Phi}(X)^\top D\bar{\Phi}(X) \\
&= D(r + Q\Phi(X))^\top D(r + Q\Phi(X)) \\
&= D\Phi(X)^\top Q^\top Q D\Phi \\
&= D\Phi(X)^\top D\Phi = C
\end{aligned}$$

Sind andererseits die Deformationstensoren der Plazierungen Φ und $\bar{\Phi}$ gleich, d. h., gilt $D\Phi(X)^\top D\Phi(X) = D\bar{\Phi}(X)^\top D\bar{\Phi}(X)$, so folgt

$$D\bar{\Phi}(X)^{-\top} D\Phi(X)^\top D\Phi(X) D\bar{\Phi}(X)^{-1} = \mathbf{Id},$$

und damit ist die Matrix $D\Phi(X) D\bar{\Phi}(X)^{-1}$ in jedem $X \in \mathfrak{B}$ orthogonal. Das ist jedoch gerade die Jacobi-Matrix des Diffeomorphismus $\Psi := \Phi \circ \bar{\Phi}^{-1}$, der $\Phi(\mathfrak{B})$ auf $\bar{\Phi}(\mathfrak{B})$ abbildet. Die Länge einer Kurve $c : [0, 1] \rightarrow \Phi(\mathfrak{B})$ ergibt sich bekanntlich zu

$$\int_0^1 \sqrt{\dot{c}(t)^\top \dot{c}(t)} dt.$$

Die Länge des Bildes dieser Kurve unter dem Diffeomorphismus Ψ ergibt sich zu

$$\int_0^1 \sqrt{\dot{c}(t)^\top D\Psi^\top(c(t)) D\Psi(c(t)) \dot{c}(t)} dt = \int_0^1 \sqrt{\dot{c}(t)^\top \dot{c}(t)} dt.$$

Sie ist also gleich der Länge von c . Das heißt, aus der Orthogonalität der Jacobi-Matrix $D\Psi(x)$ in jedem Punkt $x \in \Phi(\mathfrak{B})$ folgt, daß unter Ψ die Längen aller Kurven erhalten bleiben.

Wie diese Aussage dazu benutzt wird, um zu zeigen, daß Ψ die Einschränkung einer Isometrie des \mathbb{R}^3 auf $\bar{\Phi}^{-1}(\mathfrak{B})$ ist, kann hier nur angedeutet werden.

Liegt die Verbindungsstrecke zweier Punkte $x_1, x_2 \in \Phi(\mathfrak{B})$ vollständig in $\Phi(\mathfrak{B})$, so bildet diese bekanntlich die kürzeste Verbindung von x_1 und x_2 in $\Phi(\mathfrak{B})$. Die Länge dieser Strecke ist der Abstand von x_1 und x_2 . Da Ψ längenerhaltend ist, ist das Bild dieser Strecke die kürzeste Verbindung von $\Psi(x_1)$ und $\Psi(x_2)$, also wieder eine Strecke. Damit ist der Abstand der Punkte $\Psi(x_1)$ und $\Psi(x_2)$ gleich dem Abstand der Punkte x_1 und x_2 . Das bedeutet, daß Ψ auf dem Gebiet $\bar{\Phi}(\mathfrak{B})$ eine Isometrie ist. Diese läßt sich zu einer Isometrie auf ganz \mathbb{R}^3 fortsetzen. Die zwei Plazierungen Φ und $\bar{\Phi}$ mit gleichem Deformationstensor unterscheiden sich also höchstens durch eine Starrkörpermodifikation. \square

Folgerung 1 Sei \mathfrak{B} ein Körper mit Energiedichtefunktion \hat{E} . Das Axiom über die Invarianz gegenüber Starrkörpermodifikationen ist genau dann erfüllt, wenn sich für alle $X \in \mathfrak{B}$ die Energiedichtefunktion am Ort X als Funktion des Deformationstensors $C(X)$ am Ort X darstellen läßt. Im folgenden wird dafür einfach $\hat{E}(X, C(X))$ geschrieben.

Beachtet man, daß

$$\frac{d}{dt} C = \dot{F}^\top F + F^\top \dot{F}$$

gilt, so erhält man die zeitliche Ableitung der neu festgelegten Energiedichtefunktion zu

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{E}(X, C(X)) &= \frac{\partial\hat{E}(X, C(X))}{\partial C} : \frac{d}{dt}C_t(X) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial\hat{E}(X, C(X))}{\partial C_{ij}} \left(\dot{F}_{ki}F_{kj} + F_{ki}\dot{F}_{kj} \right) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial\hat{E}(X, C(X))}{\partial C_{ij}} \dot{F}_{ki}F_{kj} + \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial\hat{E}(X, C(X))}{\partial C_{ij}} F_{ki}\dot{F}_{kj}
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Für jede Bewegung ist der Deformationstensor C symmetrisch (und positiv definit). Deshalb kann davon ausgegangen werden, daß der Definitionsbereich für das zweite Argument von \hat{E} die Menge der symmetrischen (und positiv definiten) Matrizen ist¹. Es gilt also $\frac{\partial\hat{E}}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial\hat{E}}{\partial C_{ji}}$. Damit läßt sich der zweite Summand in Gleichung (1.28) in der Form

$$\sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial\hat{E}(X, C(X))}{\partial C_{ji}} F_{ki}\dot{F}_{kj} \quad (\text{Vertauschung der Indizes von } C)$$

schreiben. Nach Vertauschen der Bezeichner i und j erkennt man, daß das der gleiche Term wie der erste Summand in (1.28) ist, also ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\hat{E}(X, C(X)) = 2 \frac{\partial\hat{E}(X, C(X))}{\partial C} : \left(F_t^\top \dot{F}_t \right).$$

Diese Zeitableitung von $\hat{E}(X, C_t(X))$ kann man nun in die Gleichung für die Leistungsbilanz einsetzen

$$2\rho_{\text{ref}}(X) \frac{\partial\hat{E}(X, C(X))}{\partial C} : \left(F_t^\top \dot{F}_t \right) = P_t(X) : \dot{F}_t(X). \tag{1.29}$$

Um linke und rechte Seite dieser Gleichung vergleichen zu können, ist es günstig, die rechte Seite umzuformen.

$$\begin{aligned}
P_t(X) : \dot{F}_t(X) &= P_t(X) : \left(F^{-\top} F^\top \dot{F}_t(X) \right) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^3 P_{ij} F_{ki}^{-1} F_{kl}^\top \dot{F}_{lj} \\
&= \left(F_t^{-1} P_t \right) : \left(F^\top \dot{F} \right)
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Definitionsgemäß ist $F_t^{-1} P_t$ gerade der zweite Piola-Kirchhoff-Tensor S_t , außerdem wird auf der linken Seite von Gleichung (1.29) mit demselben Tensor $F^\top \dot{F}$ kontrahiert wie in der neuen rechten Seite (1.30). Da mit der Bewegung Φ_t auch \dot{F} und somit auch $F^\top \dot{F}$ willkürlich vorgegeben werden kann, muß also

$$S_t(X) = 2\rho_{\text{ref}}(X) \frac{\partial\hat{E}(X, C(X))}{\partial C} \tag{1.31}$$

¹In der Literatur (z. B. [27]) wird dem auch Rechnung getragen, indem \hat{E} als Funktion der sechs wesentlichen Komponenten von C dargestellt wird.

gelten. Das bedeutet, daß das Materialverhalten durch Gleichung (1.31) eine Funktion $\hat{S} : \mathfrak{B} \times \mathbb{R}^{3 \times 3}$ bestimmt, mit der sich der zweite Piola-Kirchhoff-Tensor $S_t(X)$ in jedem materiellen Punkt $X \in \mathfrak{B}$ in Abhängigkeit des Punktes X und des Deformationstensors $C(X)$ in diesem Punkt darstellen läßt.

Bemerkenswert ist, daß aus der Invarianz des Deformationstensors gegenüber Starrkörpermodifikationen sofort die Invarianz des zweiten Piola-Kirchhoff-Tensors gegenüber Starrkörpermodifikationen folgt. Das heißt, ist Φ_t eine Bewegung eines Körpers \mathfrak{B} und Ψ_t eine beliebige Starrkörpermodifikation, so sind die zu Φ_t und $\bar{\Phi}_t := \Psi_t \circ \Phi_t$ gehörigen zweiten Piola-Kirchhoff-Tensoren S_t und \bar{S}_t gleich. Mit Hilfe dieser Aussage lassen sich auch die ersten Piola-Kirchhoff-Tensoren leicht umrechnen. Mit der Definition des zweiten Piola-Kirchhoff-Tensors gilt

$$\begin{aligned} \bar{P}_t(X) &= D\bar{\Phi}_t(X)\bar{S}_t(X) \\ &= D\bar{\Phi}_t(X)S_t(X) \\ &= D\bar{\Phi}_t(X)(D\Phi_t(X))^{-1}P_t(X) \\ &= D\Psi_t P_t(X). \end{aligned}$$

Für die Funktion \hat{P} , die den ersten Piola-Kirchhoff-Tensor darstellt, folgt daraus

$$\hat{P}(X, D\Psi_t F_t(X)) = D\Psi_t \hat{P}(X, F_t(X)), \quad (1.32)$$

wobei F_t wieder der Deformationsgradient von Φ_t sein soll.

Im Rahmen dieser Arbeit sollen nur Körper aus homogenen und isotropen Materialien behandelt werden. Das Material eines Körpers ist *homogen*, falls die Energiedichtefunktion $\hat{E}(X, C(X))$ nicht vom materiellen Punkt $X \in \mathfrak{B}$, sondern nur vom Deformationstensor $C(X)$ abhängt.

Das heißt, die Energiedichte $E(X)$ im Punkt X ergibt sich zu

$$E(X) = \hat{E}(C(X)).$$

Es heißt, ein Körper besteht aus *isotropem* Material, falls die Energiedichte des Körpers für zwei Plazierungen Φ und $\bar{\Phi}$ gleich ist, wenn es eine orientierungserhaltende Isometrie Ψ gibt, so daß

$$\Phi = \bar{\Phi} \circ \Psi \quad (1.33)$$

gilt. Da für die Energiedichte nur der Deformationsgradient relevant ist, genügt es in den folgenden Betrachtungen, sich bei den Isometrien Ψ auf Drehungen zu beschränken.

Der Unterschied zwischen dem Axiom über die Invarianz gegenüber Starrkörpermodifikationen und der Isotropie des Materials soll anschaulich anhand zweier Experimente mit einem Ball aus homogenem Material beschrieben werden.

Nimmt man den Ball in die Hand und preßt diese zusammen, so hat man immer die gleiche Arbeit zu verrichten, egal in welche Raumrichtung man die Hand mit dem darin liegenden Ball hält. Diese Erfahrungstatsache wird durch das Axiom über die Invarianz gegenüber Starrkörpermodifikationen beschrieben.

Hält man dagegen die Hand immer in die gleiche Raumrichtung, preßt die Hand einmal zusammen, dreht dann den Ball innerhalb der Handfläche und preßt die Hand ein zweites Mal zusammen, so ist es durchaus möglich, daß sich der Ball bei den zwei Versuchen unterschiedlich schwer zusammenpressen läßt. Dies liegt daran, daß das Material in den zwei Versuchen in verschiedene (materielle) Richtungen beansprucht

wird. Das Besondere an isotropen Materialien ist nun, daß sich der Ball beim ersten und beim zweiten Mal gleich schwer zusammenpressen läßt.

Bei isotropen Materialien ist die Energiedichtefunktion invariant gegenüber einer jeden orthonormierten und orientierungserhaltenden Ähnlichkeitstransformation des Deformationstensors, denn für jede orthogonale Matrix Q mit $\det(Q) = 1$ gilt

$$\begin{aligned}\hat{E}(C(X)) &= \hat{E}(D\Phi(X)^\top D\Phi(X)) \\ &\stackrel{\text{Isotropie}}{=} \hat{E}(Q^\top D\Phi(X)^\top D\Phi(X)Q) \\ &= \hat{E}(Q^\top C(X)Q).\end{aligned}$$

Da der Deformationstensor symmetrisch ist und jede symmetrische Matrix durch eine orthonormierte orientierungserhaltende Transformation auf Diagonalgestalt gebracht werden kann, hängt die Energiedichtefunktion nur von den Eigenwerten des Deformationstensors ab. Die Elemente einer Diagonalmatrix können durch Ähnlichkeitstransformationen mit 90° -Drehmatrizen paarweise vertauscht werden. Damit ist die Reihenfolge der Eigenwerte auf der Diagonale irrelevant. Geeignete Größen zur Beschreibung des Deformationstensors, bei denen die Reihenfolge seiner Eigenwerte λ_1 , λ_2 und λ_3 keine Rolle spielt, sind seine Invarianten

$$\begin{aligned}I_1 &:= \text{spur } C = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2 &:= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \\ I_3 &:= \det C = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.\end{aligned}$$

Mit diesen ergibt sich das charakteristische Polynom von C zu

$$x^3 - I_1x^2 + I_2x - I_3.$$

Es zeigt sich, daß für isotrope Materialien schon eine recht genaue Aussage zu dem Zusammenhang zwischen Deformationstensor und dem zweitem Piola-Kirchhoff-Tensor gemacht werden kann.

Satz 5 (Zweiter Piola-Kirchhoff-Tensor für isotrope Materialien) *Bei isotropen Materialien läßt sich der zweite Piola-Kirchhoff-Tensor in der Form*

$$S = \alpha_0 \mathbf{Id} + \alpha_1 C + \alpha_2 C^2 \tag{1.34}$$

darstellen. Dabei sind die Koeffizienten α_0 , α_1 und α_2 nur von den Invarianten der Matrix C und vom materiellen Punkt X abhängig.

Beweis: Der Beweis hierfür baut auf Gleichung (1.31) auf. Dabei ist \hat{E} als Funktion der Invarianten von C aufzufassen. Man hat also²

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial I_1} \frac{dI_1}{dC} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial I_2} \frac{dI_2}{dC} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial I_3} \frac{dI_3}{dC}$$

²Der Raum der $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ der 3×3 -Matrizen, ausgestattet mit einer der Matrixnormen, ist ein Banach-Raum. Ist f eine Abbildung von einem Banachraum in einen Banachraum, so wird, wie üblich ([26]), die Ableitung von f in einem Punkt x mit $Df(x)$ bezeichnet. Die Anwendung $Df(x)h$ von $Df(x)$ auf einen Vektor h kann auch mittels Gateaux-Ableitung $Df(x, h) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon}$ berechnet werden. Es gilt $Df(x)h = Df(x, h)$ (vgl. [26]). Wenn deutlich auf die Variable (zum Beispiel der Deformationstensor C) hingewiesen werden soll, nach der differenziert wird, wird die Ableitung von f auch mit $\frac{d}{dC}f$ bezeichnet.

zu berechnen. Da die Spurbildung eine lineare Operation ist, gilt

$$\frac{\partial I_1}{\partial C}(H) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{spur}(C + \varepsilon H) - \text{spur}(H)}{\varepsilon} = \text{spur}(H) = \mathbf{Id} : H,$$

also $\frac{\partial I_1}{\partial C}(H) = \mathbf{Id}$.

Die zweite Invariante kann man auch in der Form

$$I_2 = \frac{1}{2} ((\text{spur } C)^2 - \text{spur}(C^2))$$

schreiben ($\text{spur } C$ und $\text{spur}(C^2)$ sind invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen, also braucht man diese Gleichung nur für C in Diagonalgestalt nachprüfen).

Weiter ermittelt man mit der Kettenregel

$$\frac{\partial (\text{spur } C)^2}{\partial C}(H) = 2(\text{spur } C) \text{spur}(H) = 2(\text{spur } C) \mathbf{Id} : H$$

und

$$\frac{\partial (\text{spur } C^2)}{\partial C}(H) = \text{spur}(2CH) = 2C : H.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\partial I_2}{\partial C} = \text{spur}(C) \mathbf{Id} - C.$$

Zur Berechnung von $\frac{\partial I_3}{\partial C}(H)$ macht man sich zunächst klar, daß die Ableitung der Determinante (als Abbildung, die Matrizen reelle Zahlen zuordnet) in der Identität die Spur (als lineare Abbildung) ergibt. Für die Ableitung in Richtung symmetrischer Matrizen ist das aus den folgenden Zeilen sofort einzusehen, da eine Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalform die Determinante nicht ändert (H sei die symmetrische Matrix in deren Richtung abgeleitet wird, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ seien ihre Eigenwerte).

$$\begin{aligned} \frac{\det(\mathbf{Id} + \varepsilon H) - \det(\mathbf{Id})}{\varepsilon} &= \frac{\prod_{i=1}^3 (1 + \varepsilon \lambda_i) - 1}{\varepsilon} \\ &= \frac{1 + \sum_{i=1}^3 \varepsilon \lambda_i + (\text{Terme höherer Ordnung in } \varepsilon) - 1}{\varepsilon} \\ &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i + (\text{Terme der Größenordnung } \varepsilon \text{ und kleiner}) \\ &\longrightarrow \text{spur } H \quad (\text{für } \varepsilon \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Ist H nicht symmetrisch, so erhält man das gleiche Ergebnis, nur der Beweis ist technisch etwas aufwendiger. Die Ableitung der Determinante im Deformationsgradienten C kann man auf diesen Fall zurückführen. Es gilt nämlich $\det(C + \varepsilon H) = \det(CC^{-1}(C + \varepsilon H)) = \det(C) \det(\mathbf{Id} + \varepsilon CH)$, und damit

$$\begin{aligned} D \det(C, H) &= \det(C) D \det(\mathbf{Id}, C^{-1}H) \\ &= \det(C) \text{spur}(C^{-1}H) \\ &= \det(C) C^{-1} : H, \\ \Rightarrow D \det(C) &= \det(C) C^{-1}. \end{aligned}$$

Besinnt man sich auf den Satz von Cayley-Hamilton, der besagt, daß jede Matrix Nullstelle ihres eigenen charakteristischen Polynoms ist, so kann man C^{-1} als Linearkombination von C und C^2 darstellen.

$$\begin{aligned} 0 &= C^3 - I_1 C^2 + I_2 C - I_3 \mathbf{Id} \\ 0 &= C^2 - I_1 C + I_2 - I_3 C^{-1} \\ C^{-1} &= \frac{1}{I_3} (C^2 - I_1 C + I_2) \end{aligned}$$

Wobei zu bemerken bleibt, daß der Deformationstensor C eine reguläre Matrix mit $I_3 = \det(C) \neq 0$ ist.

Insgesamt wurde für alle Invarianten von C gezeigt, daß sich ihre Ableitung nach dem Deformationstensor als Linearkombination von \mathbf{Id} , C und C^2 darstellen läßt, deren Koeffizienten nur von den Invarianten von C abhängig sind. Also ist der Satz bewiesen. \square

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß durch das Materialverhalten eine Funktion \hat{P} festgelegt wird, die den ersten Piola-Kirchhoff-Tensor $P_t(X)$ in Abhängigkeit des Deformationsgradienten $F_t(X) = D\Phi_t(X)$ im selben materiellen Punkt darstellt. Diese Funktion ist durch

$$P_t(X) = \hat{P}(F_t(X)) = F_t(X) \hat{S}(C_t(X)) \quad (1.35)$$

mit $C_t(X) = F_t^\top(X) F_t(X)$ gegeben. Für homogene und isotrope Materialien, auf die sich diese Arbeit beschränkt, ist \hat{S} in der Form (1.34) darstellbar. Die dort auftretenden skalaren Funktionen α_0 , α_1 und α_2 werden durch die Materialeigenschaften bestimmt. Mit der Funktion \hat{P} beschreibt die Bewegungsgleichung

$$\rho_{\text{ref}}(X) \ddot{\Phi}_t(X) = \rho_{\text{ref}}(X) B_t(X) + (\text{div } \hat{P}(D\Phi_t))(X). \quad (1.36)$$

eine Relation zwischen der Bewegung Φ_t und der Volumenkraft B_t eines elastischen Körpers mit vorgegebenem Materialverhalten. Durch diese Gleichung und die Gleichungen

$$\Phi_t^\partial = \Phi|_{\partial\mathfrak{B}}$$

$$\Theta_t^\partial(X) = \Theta^\partial(X, N) = \hat{P}(D\Phi_t)N \quad N \text{ äußere Einheitsnormale an } \mathfrak{B} \text{ in } X \in \partial\mathfrak{B}$$

die die Randgrößen Φ_t^∂ und Θ_t^∂ mit der Bewegung Φ_t in Beziehung setzen, wird die Verhaltensrelation (zwischen den äußeren Systemgrößen Φ_t^∂ , Θ_t^∂ und B_t) des elastischen Körpers beschrieben.

Im Abschnitt 1.3 wird sich zeigen, daß in der Gleichung, die sich durch die Linearisierung der Bewegungsgleichung (1.36) um eine spannungsfreie Lage ergibt („Bewegungsgleichung für kleine Verformungen“), das Materialverhalten schon durch zwei Konstanten charakterisiert wird.

1.2 Koordinatenwechsel

Verhaltensrelationen elastischer Körper wurden bisher in Koordinaten bezüglich eines Inertialsystems³ dargestellt. In diesem Abschnitt werden Koordinatentransfor-

³In [8] wird auf Seite 178 darauf hingewiesen, daß der Begriff des Inertialsystems aufgrund eines Zirkelschlusses in der Newtonschen Axiomatik problematisch ist. Darauf kann im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingegangen werden. Hier wird einfach die Existenz eines Inertialsystems vorausgesetzt.

mationen behandelt, mit denen sich die Verhaltensrelation elastischer Körper auch bzgl. eines beschleunigten Bezugssystems darstellen läßt. Es werden ausschließlich orthonormierte und orientierungserhaltende Koordinatenwechsel betrachtet.

1.2.1 Drehbewegungen

Zunächst wird ein Überblick über einige wichtige Eigenschaften der Mannigfaltigkeit $SO(3)$ der Drehmatrizen, und von Zeitfunktionen auf dieser Mannigfaltigkeit, gegeben.

Die Drehungen des \mathbb{R}^3 um den Ursprung sind die orientierungserhaltenden linearen Isometrien des \mathbb{R}^3 . Das sind diejenigen Selbstabbildungen Q des \mathbb{R}^3 , die abstands- und winkeltreu sind

$$\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^3)$$

und orientierungserhaltend sind

$$\det(Q) > 0.$$

Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ stellt genau dann eine Drehung um den Ursprung dar, falls sie orthogonal ist ($Q^T Q = \mathbf{Id}$) und eine positive Determinante hat ($\det(Q) = +1$). Solche Matrizen werden als Drehmatrizen bezeichnet.

Die Menge aller Drehmatrizen $SO(3)$ ist eine dreidimensionale Untermannigfaltigkeit des normierten Raumes aller 3×3 -Matrizen (vgl. [12]). Sie kann in einer Umgebung von $\mathbf{Id} \in SO(3)$ durch die Kardanwinkel parametrisiert werden.

Dazu werden die Elementardrehungen

$$\begin{aligned} \hat{Q}(\gamma_1, 0, 0) &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma_1) & -\sin(\gamma_1) \\ 0 & \sin(\gamma_1) & \cos(\gamma_1) \end{pmatrix}, \\ \hat{Q}(0, \gamma_2, 0) &:= \begin{pmatrix} \cos(\gamma_2) & 0 & \sin(\gamma_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\gamma_2) & 0 & \cos(\gamma_2) \end{pmatrix}, \\ \hat{Q}(0, 0, \gamma_3) &:= \begin{pmatrix} \cos(\gamma_3) & -\sin(\gamma_3) & 0 \\ \sin(\gamma_3) & \cos(\gamma_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit den Kardanwinkeln $\gamma_1 \in (-\pi, \pi)$, $\gamma_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\gamma_3 \in (-\pi, \pi)$ eingeführt, die gerade die Drehungen um die Koordinatenachsen darstellen. Aus diesen Elementardrehungen wird dann die Abbildung

$$\hat{Q}(\gamma) := \hat{Q}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) := \hat{Q}(\gamma_1, 0, 0) \circ \hat{Q}(0, \gamma_2, 0) \circ \hat{Q}(0, 0, \gamma_3) \quad (1.37)$$

zusammengesetzt, die $SO(3)$ in einer Umgebung von \mathbf{Id} parametrisiert (siehe hierzu auch [27]).

Für jede beliebige Drehmatrix $Q_0 \in SO(3)$ läßt sich $SO(3)$ in einer Umgebung von Q_0 mittels der Abbildung

$$Q(\gamma) := \hat{Q}(\gamma) \circ Q_0$$

parametrisieren. Das kann man sich zum Beispiel so vorstellen, daß ein Körper zunächst gemäß Q_0 verdreht wird und danach gemäß $\hat{Q}(\gamma)$ um die Winkel γ_3 , γ_2 und γ_1 (in dieser Reihenfolge) weiter verdreht wird.

Sei nun durch $t \in \mathbb{R} \mapsto Q_t \in SO(3)$ eine stetig differenzierbar durch die Zeit t parametrisierte Kurve auf $SO(3)$ gegeben.

Zunächst sei angenommen, daß $Q_{t'} = \mathbf{Id}$ zu einer Zeit $t' \in \mathbb{R}$ gilt. Dann läßt sich die Kurve in einem Zeitintervall um t' mittels der Parametrisierung $\hat{Q}(\gamma)$ durch zeitabhängige Kardanwinkel $\gamma(t)$ beschreiben. Dabei gilt $\gamma(t') = 0$. Die Zeitableitung von Q_t zum Zeitpunkt t' berechnet man leicht mittels der Produktregel aus der Darstellung (1.37) zu

$$\dot{Q}_{t'} = \frac{d}{dt} \hat{Q}(\gamma(t))|_{t=t'} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\gamma}_3(t') & \dot{\gamma}_2(t') \\ \dot{\gamma}_3(t') & 0 & -\dot{\gamma}_1(t') \\ -\dot{\gamma}_2(t') & \dot{\gamma}_1(t') & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Es ergibt sich eine schiefsymmetrische Matrix. Das läßt sich wie folgt verallgemeinern. Es sei wieder eine Kurve $t \in \mathbb{R} \mapsto Q_t \in SO(3)$ wie oben gegeben, jedoch wird nicht mehr verlangt, daß $Q_{t'} = \mathbf{Id}$ gilt. Leitet man beide Seiten der aus der Orthogonalität von Q_t resultierenden Gleichung $Q_t Q_t^\top = \mathbf{Id}$ nach der Zeit t ab, so erhält man

$$\begin{aligned} \dot{Q}_t Q_t^\top + Q_t \dot{Q}_t^\top &= 0, \\ \dot{Q}_t Q_t^\top + \left(\dot{Q}_t Q_t^\top \right)^\top &= 0. \end{aligned}$$

Also ist die in dieser Arbeit als *Drehgeschwindigkeit* von Q_t bezeichnete Matrix

$$\Omega_t := \dot{Q}_t Q_t^\top$$

schiefsymmetrisch. Der Vektorraum $\mathfrak{so}(3)$ der schiefsymmetrischen 3×3 -Matrizen kann über das Vektorprodukt $[\bullet, \bullet]$ mit Vektoren des \mathbb{R}^3 identifiziert werden, denn man sieht sofort, daß es zu jeder schiefsymmetrischen Matrix Ω genau einen Vektor $\omega \in \mathbb{R}^3$ gibt, so daß für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung

$$\Omega x = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} x = [\omega, x]$$

gilt. Ist Ω_t die Drehgeschwindigkeit einer Kurve Q_t in $SO(3)$, so wird der zugehörige Vektor ω_t auch als *Winkelgeschwindigkeit* von Q_t bezeichnet. Für das oben untersuchte Beispiel einer durch $\hat{Q}(\gamma(t))$ darstellbaren Kurve mit $\gamma(t') = 0$ stellt $\omega_{t'} = \dot{\gamma}(t')$ gerade die zeitliche Ableitung der Kardanwinkel zum Zeitpunkt t' dar.

Trivialerweise gilt die Gleichung

$$\dot{Q}_t = \dot{Q}_t \underbrace{Q_t^\top Q_t}_{=\mathbf{Id}}$$

Damit ist Q_t Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{Q}_t = \Omega_t Q_t. \quad (1.39)$$

Umgekehrt sind die Lösungen der Anfangswertaufgaben der Form (1.39) mit beliebiger vorgegebener stetiger Funktion $t \in \mathbb{R} \mapsto \Omega_t \in \mathfrak{so}(3)$ und $Q_0 \in SO(3)$ Kurven auf $SO(3)$. (Wegen

$$\frac{d}{dt} (Q_t Q_t^\top) = \dot{Q}_t Q_t^\top + Q_t \dot{Q}_t^\top \stackrel{\text{Einsetzen von (1.39)}}{=} \underbrace{\Omega_t Q_t Q_t^\top}_{\mathbf{Id}} + \underbrace{Q_t Q_t^\top \Omega_t^\top}_{\mathbf{Id}} = 0$$

ist die Funktion $t \mapsto Q_t Q_t^\top$ zeitlich konstant. Zur Zeit $t = 0$ ist sie nach Voraussetzung gleich der Identität. Also genügt Q_t für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ der Gleichung $Q_t Q_t^\top = \mathbf{Id}$ und ist somit orthogonal. Außerdem ist die Funktion $t \mapsto \det(Q_t)$, die aufgrund der Orthogonalität von Q_t nur die Werte -1 und $+1$ annehmen kann, stetig und zur Zeit $t = 0$ gleich $+1$. Womit $\det(Q_t) = +1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.)

Für konstante Matrizen $\Omega = [\omega, \bullet]$ mit $|\omega| \neq 0$ ist die Fundamentallösung der Differentialgleichung (1.39) durch

$$e^{\Omega t} = \frac{\omega \omega^\top}{|\omega|^2} + \left(\mathbf{Id} - \frac{\omega \omega^\top}{|\omega|^2} \right) \cos(|\omega|t) + \frac{\Omega}{|\omega|} \sin(|\omega|t)$$

gegeben (was man durch Einsetzen in (1.39)) bestätigt). Die auftretende Matrix $\frac{\omega \omega^\top}{|\omega|^2}$ ist die orthogonale Projektion auf die durch ω aufgespannte *Drehachse*, die Matrix $\left(\mathbf{Id} - \frac{\omega \omega^\top}{|\omega|^2} \right)$ ist die orthogonale Projektion auf die zu ω orthogonale *Drehebene*. Die Drehungen mit konstanter Drehgeschwindigkeit heißen *gleichförmige Drehungen*.

Jede differenzierbare Drehungsbewegung $Q_{(t+\varepsilon)}$ läßt sich bis zur ersten Ordnung in ε durch eine gleichförmige Drehung $\bar{Q}_\varepsilon = e^{\bar{\Omega}\varepsilon} \bar{Q}_0$ approximieren. Das heißt, es gibt ein $\bar{\Omega} \in \mathfrak{so}(3)$ und ein $\bar{Q}_0 \in SO(3)$ mit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(Q_{(t+\varepsilon)} - e^{\bar{\Omega}\varepsilon} \bar{Q}_0 \right) = 0.$$

Die Matrizen $\bar{\Omega}$ und \bar{Q}_0 kann man aus dieser Gleichung ablesen, wenn man $Q_{t+\varepsilon}$ und $e^{\bar{\Omega}\varepsilon}$ bis zur ersten Ordnung in ε entwickelt⁴

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(Q_t + \dot{Q}_t \varepsilon + o(\varepsilon) - (\mathbf{Id} + \bar{\Omega} \varepsilon + o(\varepsilon)) \bar{Q}_0 \right) = 0.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{Q}_0 &= Q_t, \\ \bar{\Omega} &= \dot{Q}_t Q_0^\top = \Omega_t, \\ \bar{\omega} &= \omega_t, \end{aligned}$$

wobei $\bar{\omega}$ und ω die Winkelgeschwindigkeiten der Drehungen \bar{Q}_t bzw. Q_t sind. Dies verdeutlicht, weshalb ω_t als (momentane) Winkelgeschwindigkeit von Q_t bezeichnet wird.

1.2.2 Koordinatenwechsel

Der Anschauungsraum wird in dieser Arbeit durch den mit dem Standardskalarprodukt $\langle \bullet, \bullet \rangle$ ausgestatteten \mathbb{R}^3 modelliert. Damit ist die Koordinatisierung eines Raumpunktes $x \in \mathbb{R}^3$ bzgl. der im Ursprung $0 \in \mathbb{R}^3$ angehefteten kanonischen Basis $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ der Vektor x selber. Alle bisher behandelten Gleichungen können sowohl als Gleichungen im Modellraum wie auch als Gleichungen in den speziellen Koordinaten bzgl. der im Ursprung angehefteten kanonischen Basis interpretiert werden.

⁴Das Symbol $o(\varepsilon)$ steht für (die Menge aller) Funktionen f , für die $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ gilt (vgl. [18]).

Ein weiteres Bezugssystem sei durch einen Bezugspunkt r und eine positiv orientierte und orthonormierte Vektorraumbasis $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ des \mathbb{R}^3 vorgegeben⁵.

Der Koordinatenvektor \bar{x} eines Raumpunktes $x \in \mathbb{R}^3$ bzgl. des neuen Koordinatensystems ist durch die Gleichung

$$x = r_t + \bar{e}_1 \bar{x}_1 + \bar{e}_2 \bar{x}_2 + \bar{e}_3 \bar{x}_3$$

definiert. Da als Modellraum der \mathbb{R}^3 gewählt wurde, kann diese Gleichung auch mit der aus den Basisvektoren $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ gebildeten Transformationsmatrix

$$Q := \begin{pmatrix} | & | & | \\ \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

in der Form

$$x = r + Q\bar{x} \tag{1.40}$$

geschrieben werden. Die Einheitsvektoren des neuen Bezugssystem sind als Spaltenvektoren in die Matrix Q eingetragen, Im folgenden wird das Paar (r, Q) des Bezugspunktes und der Transformationsmatrix mit dem Bezugssystem $(r, (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3))$ identifiziert. Entsprechend steht $(0, \mathbf{Id})$ für die im Ursprung angeheftete kanonische Basis des \mathbb{R}^3 . Die Gleichung (1.40) wird hier als *Punktkoordinatenwechsel* von (r, Q) nach $(0, \mathbf{Id})$ bezeichnet.

Leicht überzeugt man sich, daß $Q^T Q = \mathbf{Id}$ gilt. Also ist Q orthogonal. Außerdem gilt $\det Q = \det(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = +1$. Damit ist Q eine Drehmatrix.

Zur Modellierung des Anschauungsraumes wird der \mathbb{R}^3 als affiner Raum genutzt. Der auf dem affinen Raum \mathbb{R}^3 operierende lineare Raum von Verschiebungsvektoren $v : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto x + v \in \mathbb{R}^3$ ist wieder der \mathbb{R}^3 . (Verschiebungs-)Vektoren transformieren sich wie Punktdifferenzen

$$\begin{aligned} v &= (x + v) - x = (r + Q(\bar{x} + \bar{v})) - (r + Q\bar{x}) = Q\bar{v}, \\ v &= Q\bar{v}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung sei als *Vektorkoordinatenwechsel* von (r, Q) nach $(0, \mathbf{Id})$ bezeichnet. Wegen $Q^T Q = \mathbf{Id}$ ist

$$\bar{v} = Q^T v$$

die Rücktransformation, also der Vektorkoordinatenwechsel von $(0, \mathbf{Id})$ nach (r, Q) .

Als Grenzwerte von Differenzenquotienten sind Geschwindigkeiten und Beschleunigung zweimal differenzierbarer Ortskurven im \mathbb{R}^3 Vektoren, außerdem werden Kräfte laut Newtonscher Axiomatik als Vektoren modelliert.

Als nächstes sollen durch die Zeit zweimal differenzierbare Kurven im \mathbb{R}^3 , sowie deren Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren bzgl. eines bewegten Koordinatensystems koordinatisiert werden.

Das bewegte Koordinatensystem wird durch einen zeitveränderlichen Bezugspunkt r_t und eine zeitveränderliche Drehmatrix Q_t beschrieben ($t \in \mathbb{R} \mapsto r_t$ und $t \in \mathbb{R} \mapsto Q_t$ seien zweimal in der Zeit t differenzierbar).

Die Koordinatisierung von x_t bzgl. (r_t, Q_t) wird zeitpunktweise ausgeführt

$$x_t = r_t + Q_t \bar{x}_t.$$

⁵Positiv orientiert heißt $\det(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) > 0$, orthonormiert heißt $\langle \bar{e}_i, \bar{e}_i \rangle = 1$ und $\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = 0$ falls $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, 3$).

Durch die Anwendung der Produktregel ergeben sich Geschwindigkeit und Beschleunigung der Raumkurve bzgl. $(0, \mathbf{Id})$ zu

$$\dot{x}_t = \dot{r}_t + \dot{Q}_t \bar{x}_t + Q_t \dot{\bar{x}}_t \quad \text{bzw.} \quad (1.41)$$

$$\ddot{x}_t = \ddot{r}_t + \ddot{Q}_t \bar{x}_t + 2\dot{Q}_t \dot{\bar{x}}_t + Q_t \ddot{\bar{x}}_t. \quad (1.42)$$

Vektorkoordinatenwechsel dieser zwei Vektoren von $(0, \mathbf{Id})$ nach (r_t, Q_t) ergibt

$$\bar{\bar{x}}_t = Q^T \dot{x}_t = \bar{r}_t + Q_t^T \dot{Q}_t \bar{x}_t + \dot{\bar{x}}_t \quad \text{bzw.} \quad (1.43)$$

$$\bar{\bar{x}}_t = Q^T \ddot{x}_t = \bar{r}_t + Q_t^T \ddot{Q}_t \bar{x}_t + 2Q_t^T \dot{Q}_t \dot{\bar{x}}_t + \ddot{\bar{x}}_t \quad (1.44)$$

mit $\bar{r}_t = Q^T \dot{r}_t$ und $\bar{\bar{r}}_t = Q^T \ddot{r}_t$.

Die Matrix $Q^T \dot{Q} = Q^T \dot{Q} Q^T Q = Q^T \Omega_t Q$ ist die Koordinatentransformierte der Drehgeschwindigkeit Ω_t von Q_t von dem Bezugssystem $(0, \mathbf{Id})$ nach dem Bezugssystem (r_t, Q_t) und wird dementsprechend mit $\bar{\Omega}_t$ bezeichnet (selbstverständlich ist $\bar{\Omega}_t$ wiederum eine schiefsymmetrische Matrix).

Da $Q^T \in SO(3)$ ein Isomorphismus des orientierten euklidischen Raumes \mathbb{R}^3 ist und das Vektorprodukt auf der Grundlage der euklidischen Struktur des \mathbb{R}^3 erklärt werden kann (siehe hierzu [14]), gilt für alle Vektoren $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung $Q^T[\bar{y}, \bar{x}] = [Q^T \bar{y}, Q^T \bar{x}]$.

Aus der Gleichung

$$\bar{\Omega} \bar{x} = Q^T \Omega Q \bar{x} = Q^T [\omega, Q \bar{x}] = [Q^T \omega, \bar{x}]$$

liest man den zur schiefsymmetrischen Matrix $\bar{\Omega}_t$ gehörigen Vektor $\bar{\omega} = Q^T \omega$ ab.

Ist also ω_t die zur Transformationsmatrix Q_t gehörige Winkelgeschwindigkeit, so ergibt sich der Vektor $\bar{\omega}_t$ für $\bar{\Omega}_t$ aus dem Vektorkoordinatenwechsel des Vektors ω_t von $(0, \mathbf{Id})$ nach (r_t, Q_t) .

Eine Berechnungsvorschrift für die Matrix $Q^T \ddot{Q}$ ergibt sich aus der Gleichung

$$\begin{aligned} Q^T \ddot{Q} &= Q^T \frac{d}{dt} \underbrace{(Q Q^T)}_{=\mathbf{Id}} \dot{Q} \\ &= Q^T \frac{d}{dt} (Q_t \bar{\Omega}_t) \\ &= Q^T (\dot{Q}_t \bar{\Omega}_t + Q_t \dot{\bar{\Omega}}_t) \\ &= \bar{\Omega}_t^2 + \dot{\bar{\Omega}}_t. \end{aligned}$$

Die Ableitung von $\dot{\bar{\Omega}}_t$ ist komponentenweise auszuführen. Also ist der schiefsymmetrischen Matrix $\dot{\bar{\Omega}}_t$ der Vektor $\dot{\bar{\omega}}_t$ zugeordnet. Die Matrix $\bar{\Omega}_t^2 = -\bar{\Omega}_t^T \bar{\Omega}_t$ ist symmetrisch, man braucht also nur sechs Komponenten auszurechnen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß sich die bzgl. (r_t, Q_t) koordinatisierten Vektoren der Geschwindigkeit \dot{x}_t und der Beschleunigung \ddot{x}_t einer Raumkurve x_t aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}}_t &= \bar{r}_t + \bar{\Omega}_t \bar{x}_t + \dot{\bar{x}}_t \\ \bar{\bar{x}}_t &= \bar{r}_t + (\dot{\bar{\Omega}}_t + \bar{\Omega}_t^2) \bar{x}_t + 2\bar{\Omega}_t \dot{\bar{x}}_t + \ddot{\bar{x}}_t \end{aligned}$$

bei gegebenen Koordinatenvektoren $\bar{x}_t, \dot{\bar{x}}_t, \ddot{\bar{x}}_t$ berechnen lassen.

1.2.3 Die Bewegungsgleichung in neuen Koordinaten

Die durch die Gleichungen

$$\rho_{\text{ref}} \ddot{\Phi}_t(X) = \rho_{\text{ref}} B_t(X) + \text{div}(\hat{P}(\text{D}\Phi_t))(X) \quad (X \in \mathfrak{B}) \quad (1.45)$$

$$\Theta_t^\partial(X) = \hat{P}(\text{D}\Phi_t)N \quad N \text{ äußere Einheitsnormale an } \mathfrak{B} \text{ in } X \in \partial\mathfrak{B} \quad (1.46)$$

beschriebene Verhaltensrelation eines elastischen Körpers \mathfrak{B} gilt für Bewegungen Φ_t des Körpers im Modell \mathbb{R}^3 des Anschauungsraumes. Wie im vorhergehenden Abschnitt klargestellt wurde, können die Gleichungen (1.45) und (1.46) ebenfalls als Darstellung der Verhaltensrelation in Koordinaten bzgl. des Inertialsystems $(0, \mathbf{Id})$ gedeutet werden.

Im folgenden soll aus diesen Gleichungen die Beschreibung der Verhaltensrelation bzgl. eines (eventuell) gegenüber $(0, \mathbf{Id})$ beschleunigten Bezugssystems (r_t, Q_t) hergeleitet werden.

Die Zeitfunktion $t \mapsto \Phi_t(X)$ ist die Raumkurve eines materiellen Punktes $X \in \mathfrak{B}$ und $\ddot{\Phi}_t$ ist die zugehörige Beschleunigung. Durch einen Koordinatenwechsel von $(0, \mathbf{Id})$ nach (r_t, Q_t) ergibt sich die Kurve $t \mapsto \bar{\Phi}_t(X)$ mit $\Phi_t(X) = r_t + Q_t \bar{\Phi}_t(X)$. Dem vorhergehenden Abschnitt entnimmt man die Gleichung

$$Q_t^\top \ddot{\Phi}_t(X) = \bar{r}_t + (\dot{\bar{\Omega}}_t + \bar{\Omega}_t^2) \bar{\Phi}_t(X) + 2\bar{\Omega}_t \dot{\bar{\Phi}}_t + \ddot{\bar{\Phi}}_t. \quad (1.47)$$

Nach Multiplikation von (1.45) mit Q_t^\top kann man in dieser Gleichung $Q_t^\top \ddot{\Phi}_t$ durch die rechte Seite von (1.47) ersetzen und erhält

$$\rho_{\text{ref}} \left(\bar{r}_t + (\dot{\bar{\Omega}}_t + \bar{\Omega}_t^2) \bar{\Phi}_t(X) + 2\bar{\Omega}_t \dot{\bar{\Phi}}_t + \ddot{\bar{\Phi}}_t \right) = \rho_{\text{ref}} Q_t^\top B_t + Q_t^\top \text{div}(\hat{P}(\text{D}\Phi_t))(X).$$

Die Größe $\bar{B}_t := Q_t^\top B_t$ ist die Koordinatisierung des Vektorfeldes B_t bzgl. (r_t, Q_t) .

Der Term $Q_t^\top \text{div}(P_t)(X)$ lautet mit den Spaltenvektoren $P_{\bullet,i}$ ($i = 1, 2, 3$) des ersten Piola-Kirchhofftensors P_t ausgeschrieben

$$\begin{aligned} Q_t^\top \text{div}(P_t)(X) &= \sum_{i=1}^3 Q_t^\top \frac{\partial}{\partial X_i} P_{\bullet,i} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_i} (Q_t^\top P_{\bullet,i}). \end{aligned}$$

Die Transformationsmatrix Q_t^\top kann also mit unter den Divergenzoperator gezogen werden

$$Q_t^\top \text{div}(\hat{P}(\text{D}\Phi_t)) = \text{div}(Q_t^\top \hat{P}(\text{D}\Phi_t)). \quad (1.48)$$

Ein Wechsel zwischen orthonormierten und positiv orientierten Bezugssystemen wirkt wie eine Starrkörpertransformation (vgl. Abschnitt 1.1.3, Gleichung (1.27)). Damit folgt aus der Gleichung (1.32) auch die Invarianz von \hat{P} unter solchen Koordinatenwechseln, also gilt

$$Q_t^\top \hat{P}(\text{D}\Phi_t) = \hat{P}(Q_t^\top \text{D}\Phi_t) = \hat{P}(\text{D}\bar{\Phi}_t).$$

Zusammengefaßt ergibt sich die Gleichung

$$\rho_{\text{ref}} \left(\bar{r}_t + (\dot{\bar{\Omega}}_t + \bar{\Omega}_t^2) \bar{\Phi}_t(X) + 2\bar{\Omega}_t \dot{\bar{\Phi}}_t + \ddot{\bar{\Phi}}_t \right) = \rho_{\text{ref}} \bar{B}_t(X) + \left(\text{div} \hat{P}(\text{D}\bar{\Phi}_t) \right) (X) \quad (1.49)$$

in den bzgl. (r_t, Q_t) koordinatisierten Größen $\bar{\Phi}_t$ und \bar{B}_t . Außerdem erhält man für die bzgl. (r_t, Q_t) koordinatisierte Oberflächenspannung $\bar{\Theta}_t^\partial = Q^\top \Theta_t^\partial$ die Gleichung

$$\bar{\Theta}_t^\partial = \hat{P}(\text{D}\bar{\Phi}_t(X))N \quad (N \text{ äußere Einheitsnormale an } \mathfrak{B} \text{ in } X \in \partial\mathfrak{B}).$$

Die beschreibenden Gleichungen (1.49,1.2.3) und (1.45,1.46) der Verhaltensrelation elastischer Körper bzgl. (r_t, Q_t) bzw. $(0, \mathbf{Id})$ werden im folgenden öfters zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ref}} A_t(X) &= \rho_{\text{ref}} B_t(X) + (\text{div } \hat{P}(\text{D}\Phi))(X) \\ \Theta^\partial(X) &= \hat{P}(\text{D}\Phi(X))N \quad N \text{ äußere Einheitsnormale an } \mathfrak{B} \text{ in } X \in \partial\mathfrak{B} \end{aligned}$$

zusammengefaßt. Auf welches Bezugssystem die Koordinaten Φ_t , B_t , Θ^∂ sich beziehen, geht aus dem Kontext hervor oder die Aussagen, die unter Verwendung dieser Gleichungen getroffen werden, sind für beide Bezugssysteme gültig. Die Größe A_t steht bei der Koordinatisierung bzgl. des beschleunigten Bezugssystems (r_t, Q_t) für den Term

$$A_t = \bar{r}_t + \left(\dot{\bar{\Omega}}_t + \bar{\Omega}_t^2 \right) \Phi_t(X) + 2\bar{\Omega}_t \dot{\Phi}_t + \ddot{\Phi}_t \quad (1.50)$$

und bei der Koordinatisierung bzgl. des Inertialsystems $(0, \mathbf{Id})$ für den Term

$$A_t = \ddot{\Phi}_t. \quad (1.51)$$

1.3 Linearisierung der Bewegungsgleichung

Seien H_1 und H_2 Banach-Räume, x_0 ein Punkt aus H_1 und $U \subset H_1$ eine Umgebung von x_0 .

Die *Linearisierung* einer im Punkt $x_0 \in U$ stetig differenzierbaren Funktion $f : U \rightarrow H_2$ ist die affine Abbildung

$$\delta x \in H_1 \mapsto f(x_0) + \text{D}f(x_0)\delta x. \quad (1.52)$$

Die *Linearisierung* der Gleichung

$$f(x) = 0 \quad (x \in U) \quad (1.53)$$

in einem Punkt $x_0 \in U$ ist die lineare Gleichung

$$f(x_0) + \text{D}f(x_0)\delta x = 0 \quad (1.54)$$

mit der Variablen $\delta x \in H_1$. Klar ist, daß sich jede Gleichung mit vektorraumwertiger rechter und linker Seite in die Form (1.53) umformen läßt. Oft wird in der Literatur die Variable der linearisierten Gleichung durch ein Voranstellen von δ vor die Variable der zugehörigen nichtlinearen Gleichung gekennzeichnet. Die Bilder 1.2 und 1.3 sollen die Linearisierung von Funktionen und Gleichungen veranschaulichen. Sind $f, g : H^1 \rightarrow H^2$ differenzierbare Funktionen, und ist die Gleichung $f(x) = g(x)$ in einem Punkt x_0 erfüllt, so ist die Linearisierung $f(x_0) + \text{D}f(x_0)\delta x = g(x_0) + \text{D}g(x_0)\delta x$ dieser Gleichung im Punkt x_0 gleich der zugehörigen Tangentialraumgleichung $\text{D}f(x_0)\delta x = \text{D}g(x_0)\delta x$.

Zur Linearisierung der Bewegungsgleichung

$$\rho_{\text{ref}}(X)\ddot{\Phi}_t(X) = \rho_{\text{ref}}(X)B_t(X) + \text{div}(\hat{P}_t(\text{D}\Phi_t(X))) \quad (1.55)$$

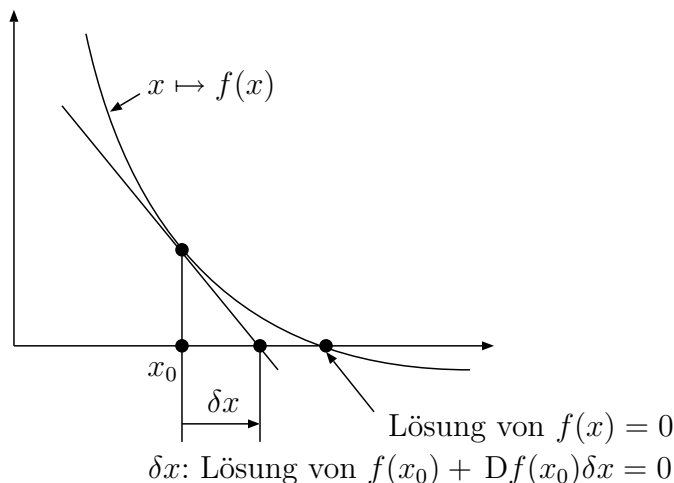


Abbildung 1.2: Linearisierung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 und Gegenüberstellung der Lösungen der nichtlinearen Gleichung $f(x) = 0$ und der in x_0 linearisierten Gleichung $f(x_0) + Df(x_0)\delta x = 0$.

in den Unbekannten Φ_t und B_t beschränkt man sich bzgl. der Zeit t auf ein kompaktes Beobachtungszeitintervall $T \subset \mathbb{R}$ und wählt als Definitionsbereiche für die Unbekannten Φ_t und B_t den Banachraum $C^2(T \times \bar{\mathfrak{B}}, \mathbb{R}^3)$ mit der zugehörigen Supremumsnorm (siehe [32]). Mit den obigen Bezeichnern ist es dann z. B. sinnvoll zur Linearisierung $H_1 := C^2(T \times \bar{\mathfrak{B}}, \mathbb{R}^3) \times C^2(T \times \bar{\mathfrak{B}}, \mathbb{R}^3)$ und $H_2 := C^0(T \times \bar{\mathfrak{B}}, \mathbb{R}^3)$ zu setzen.

Für die Anwendung der Methode der finiten Elemente sind diese Funktionenräume zu klein und müssen deshalb später für die linearisierten Gleichungen wieder erweitert werden (siehe Abschnitt 2.1).

Im folgenden werden nur Körper betrachtet, für die die Bewegung $\Phi_t = \mathbf{Id}_{\mathfrak{B}}$ ($t \in T$) spannungsfrei ist, d. h. es gilt $\hat{P}(\mathbf{Id}_{\mathfrak{B}}) = 0$. Die Bewegungsgleichung (1.55) soll für solche Körper in der Bewegung $\Phi_t = \mathbf{Id}_{\mathfrak{B}}$ und der Volumenkraft $B_t = 0$ linearisiert werden.

Die Φ_t zugeordnete Unbekannte der linearisierten Bewegungsgleichung $\delta\Phi_t$ ist ein Vektorfeld aus $C^2(T \times \bar{\mathfrak{B}}, \mathbb{R}^3)$. Dieses wird mit U_t bezeichnet und heißt *Verschiebung*.

Weiterhin geht die Volumenkraft B_t nur linear in die Bewegungsgleichung ein. Außerdem wird in $B_t = 0$ linearisiert. Somit ist B_t in der linearisierten Gleichung einfach durch δB_t zu ersetzen. Im folgenden wird meist in der linearisierten Gleichung der Einfachheit halber der Bezeichner B_t beibehalten.

Die Ableitung des Deformationsgradienten $F_t = D\Phi_t$ nach Φ_t in der Bewegung $\Phi_t = \mathbf{Id}$ ist DU_t .

Als Maß für die reine Deformation (ohne Rotationsbewegung) wird im Rahmen der linearisierten Gleichung die Ableitung des halben Deformationstensors $\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}F_t^T F_t$ nach Φ_t in der Bewegung $\Phi_t = \mathbf{Id}$ genutzt

$$\varepsilon := D\frac{1}{2}F_t^T F_t|_{\Phi_t=\mathbf{Id}} = \frac{1}{2}(DU_t^T + DU_t).$$

Die Größe ε wird als *Verzerrungstensor* bezeichnet⁶.

⁶Der Vorfaktor $\frac{1}{2}$ kann z. B. wie folgt motiviert werden. Der Deformationsgradient $F_t(X)$ in

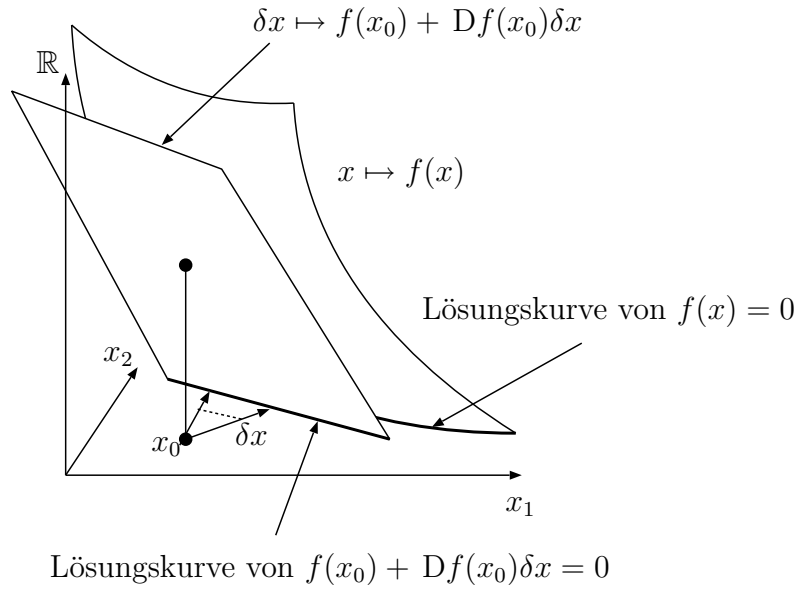


Abbildung 1.3: Linearisierung einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und der Gleichung $f(x) = 0$ in einem Punkt x_0 . Der Graph von $\delta x \mapsto f(x_0) + Df(x_0)\delta x$ ist die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Zunächst wird das Materialgesetz untersucht. Da in dieser Arbeit nur isotrope Materialien behandelt werden, kann die Beziehung $\hat{S}(C) = \alpha_1 \mathbf{Id} + \alpha_2 C + \alpha_3 C^2$ zwischen dem Deformationstensor C und dem zweiten Piola-Kirchhoff-Tensor S genutzt werden. Mit dem Deformationsgradienten $F_t = D\Phi_t$ gilt

$$\hat{P}(F_t) = F_t \hat{S}(F_t^\top F_t).$$

Diese Größe ist in $F_t = \mathbf{Id}$ nach F_t abzuleiten. Ketten- und Leibnitzregel ergeben

$$D\hat{P}(\mathbf{Id})H = H \underbrace{\hat{S}(\mathbf{Id})}_{=0} + \mathbf{Id} D\hat{S}(\mathbf{Id})(H^\top + H). \quad (1.56)$$

Der erste Summand entfällt, da \mathbf{Id} eine spannungsfreie Bewegung des Körpers sein soll.

Es ist noch die Frechet-Ableitung von $\hat{S}(C)$ in $C = \mathbf{Id}$ zu bestimmen. In $\hat{S}(C)$ treten nur Terme der Gestalt $\alpha_i \cdot C^i$ ($i = 0, 1, 2$) auf. Die Produktregel besagt

$$D(\alpha_i C^i)|_{C=\mathbf{Id}} = D\alpha_i|_{\mathbf{Id}} \cdot C^i + \alpha_i DC^i.$$

In den Beweis des Satzes über die Darstellung des zweiten Piola-Kirchhoff-Tensors bei isotropen Materialien fließt nur die Voraussetzung ein, daß sich S (bis

einem Punkt X kann eindeutig in eine Drehmatrix Q und eine symmetrische Matrix S zerlegt werden $F_t(X) = QS$ (Polare Zerlegung). Die Matrix S ist die Quadratwurzel aus dem Deformationstensor C , beschreibt also die reine Deformation im Punkt X , während Q die reine Drehung beschreibt. Die Variation von $F_t(X)$ in $F_t(X) = \mathbf{Id}$ (und damit in $Q = S = \mathbf{Id}$) ergibt die Gleichung $DU = \delta F_t(X) = (\delta Q)S + Q(\delta S)$. Dabei ist δQ als Ableitung einer Kurve auf $SO(3)$ im Punkt \mathbf{Id} eine schiefsymmetrische Matrix und δS ist eine symmetrische Matrix. Damit ergibt sich $\delta S = \frac{1}{2}(DU^\top + DU)$. Diesen linearisierten Deformationsanteil von $\delta F_t(X)$ nutzt man zur Definition von ε .

auf Multiplikation mit einer Massendichte) als Ableitung $\frac{\partial \hat{E}}{\partial C}$ der Energiedichtefunktion \hat{E} darstellen läßt und daß \hat{E} isotrop ist. Der Satz läßt sich also allgemeiner wie folgt formulieren.

Satz 6 (Ableitung isotroper symmetrischer Matrizen) *Ist eine auf den (regulären) symmetrischen Matrizen definierte differenzierbare reelle Funktion α nur von den Invarianten ihres Arguments abhängig, so ist $D\alpha(C)$ als Linearkombination von \mathbf{Id} , C und C^2 darstellbar, deren Koeffizienten nur von den Invarianten von C abhängen.*

Im Falle $C = \mathbf{Id}$ ergibt sich also für $D\alpha(\mathbf{Id})$ die Einheitsmatrix multipliziert mit einer Konstanten. Die Anwendung von $D\alpha(\mathbf{Id})$ auf eine Matrix H entspricht der Spurbildung von H und der Multiplikation mit einer Konstanten.

Die Ableitungen der Potenzen von C in $C = \mathbf{Id}$ sind

$$\begin{aligned} DC^1|_{\mathbf{Id}}H &= H, & \text{und} \\ DC^2|_{\mathbf{Id}}H &= 2H. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich aus Gleichung (1.56) und den vorstehenden Überlegungen die Linearisierung des ersten Piola-Kirchhoff-Tensors zu

$$D\hat{P}(\mathbf{Id})DU_t = \lambda \operatorname{spur}(\varepsilon)\mathbf{Id} + 2\mu\varepsilon$$

mit zwei durch das Material bestimmten Konstanten λ und μ und dem Verzerrungstensor $\varepsilon = \frac{1}{2}(DU_t^T + DU_t)$. Die Konstanten λ und μ werden als Lamesche Konstanten bezeichnet.

Das Materialgesetz wird oft auch unter Verwendung des *Materialtensors*

$$\mathbf{C} := D\hat{P}(\mathbf{Id})$$

kurz in der Form $P = \mathbf{C}DU_t$ geschrieben.

Außer \hat{P} sind alle anderen in der Bewegungsgleichung auftretenden Funktionen (bzw. Operatoren) affinlinear von Φ_t abhängig und bleiben bei der Linearisierung erhalten. Damit lautet die linearisierte Bewegungsgleichung

$$\rho_{\text{ref}}\ddot{U}_t = \rho_{\text{ref}}B_t + \operatorname{div}(\mathbf{C}DU_t). \quad (1.57)$$

Gegenüber der Bewegungsgleichung im Inertialsystem kommt bei der Bewegungsgleichung im Nichtinertialsystem nur eine affin-lineare Transformation hinzu. Die Linearisierung der Bewegungsgleichung im Nichtinertialsystem lautet somit

$$\rho_{\text{ref}}(\ddot{r} + (\bar{\Omega} + \bar{\Omega}^2)(X + U_t) + 2\bar{\Omega}\dot{U}_t + \ddot{U}_t) = \rho_{\text{ref}}\bar{B} + \operatorname{div}(\mathbf{C}DU_t). \quad (1.58)$$

Zur Beschreibung der Verhaltensrelation eines elastischen Körpers gehören neben der Bewegungsgleichung noch die Gleichungen für die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \Theta_t^\partial(X) &= \Theta_t(X, N) = \hat{P}(D\Phi_t(X))N \\ \Phi_t(X) &= \Phi_t^\partial(X), \end{aligned}$$

wobei N die äußere Einheitsnormale an \mathfrak{B} in $X \in \partial\mathfrak{B}$ sei. Bei der ersten Gleichung setzt sich H_1 aus $C^1(T \times \partial\mathfrak{B}, \mathbb{R}^3)$ und $C^2(T \times \bar{\mathfrak{B}}, \mathbb{R}^3)$ zusammen bei der zweiten Gleichung aus $C^2(T \times \partial\mathfrak{B}, \mathbb{R}^3)$ und $C^2(T \times \bar{\mathfrak{B}}, \mathbb{R}^3)$.

Die Linearisierung dieser beiden Gleichungen bereitet keine Schwierigkeiten. Die zugehörigen linearisierten Gleichungen sind

$$\begin{aligned}\delta\Theta_t^\partial(X) &= \delta\Theta_t(X, N) = (\mathbf{C} \mathbf{D}U_t(X))N, \\ \delta\Phi_t^\partial(X) &= \delta\Phi_t(X) = U_t(X).\end{aligned}\tag{1.59}$$

Damit kann der nichtlinearen Verhaltensrelation eine lineare Verhaltensrelation des elastischen Körpers zugeordnet werden, die durch die Gleichungen (1.57) und (1.59) beschrieben wird. Im folgenden werden fast ausschließlich die linearisierten Gleichungen verwendet. In diesen wird statt $\delta\Theta_t^\partial$ der Einfachheit halber Θ_t^∂ geschrieben, obwohl dies nicht ganz korrekt ist. Ist an einer Stelle der Unterschied zwischen $\delta\Theta_t^\partial$ und Θ_t^∂ wesentlich, so wird extra darauf hingewiesen. Außerdem wird im folgenden $\delta\Phi_t^\partial$ mit U_t^∂ bezeichnet.

Kapitel 2

Die Methode der finiten Elemente (FEM)

Oft steht die Aufgabe, ein System als Netzwerk zu modellieren, welches ein Teilsystem mit elastischen Körpern enthält. Das Verhalten elastischer Körper kann durch eine partielle Differentialgleichung beschrieben werden.

In Modellbeschreibungssprachen (z. B. HDL-A und MAST) für Netzwerkanalyseprogramme (z. B. ELDO und SABER) sind jedoch meist keine Funktionsaufrufe zur näherungsweise Lösung partieller Differentialgleichungen vorgesehen.

Mittels der Methode der finiten Elemente wird der Bewegungsgleichung eines elastischen Körpers ein (endlichdimensionales) gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit der Zeit als unabhängige Variable zugeordnet. Die Herleitung dieses Differentialgleichungssystems ist Inhalt dieses Kapitels.

Die notwendigen Funktionsaufrufe zur numerischen Integration von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen sind in den Beschreibungssprachen für Netzwerkanalyseprogramme normalerweise enthalten. Das ermöglicht die numerische Berechnung der Lösungen von Netzwerken, in denen das Verhalten elastischer Körper näherungsweise durch gewöhnliche Differentialgleichungssysteme beschrieben wird.

2.1 Umformulierung der Bewegungsgleichung in eine Variationsgleichung

Die linearisierte Verhaltensrelation eines elastischen Körpers \mathfrak{B} wird durch die Gleichungen

$$\rho_{\text{ref}} A_t(X) = \rho_{\text{ref}} B_t(X) + (\text{div}(\mathbf{C} D U_t))(X) \quad (X \in \mathfrak{B}), \quad (2.1)$$

$$U_t^\partial(X) = U_t(X) \quad (X \in \partial \mathfrak{B}), \quad (2.2)$$

$$\Theta_t^\partial(X) = (\mathbf{C} D U_t(X)) N \quad (2.3)$$

in den Größen U_t^∂ , Θ_t^∂ und B_t beschrieben. Aus der Linearisierung der Gleichungen (1.51, 1.50) ergibt sich für die Beschleunigung A_t in Koordinaten bzgl. des Inertialsystems $(0, \mathbf{Id})$ die Gleichung

$$A_t := \ddot{U}_t, \quad (2.4)$$

und für die Beschleunigung A_t in Koordinaten bzgl. des Systems (r_t, Q_t) ergibt sich die Gleichung

$$A_t := \ddot{r} + (\dot{\bar{\Omega}} + \bar{\Omega}^2)(X + U_t) + 2\bar{\Omega}\dot{U}_t + \ddot{U}_t. \quad (2.5)$$

Damit die in diesem Kapitel beschriebenen Verfahren problemlos anwendbar sind, wird vorausgesetzt, daß \mathfrak{B} polygonal berandet ist. Diese Annahme ist in vielen Anwendungsfällen erfüllt.

Elemente der Verhaltensrelation des elastischen Körpers können zum Beispiel durch Lösungen einer Rand- und Anfangswertaufgabe dargestellt werden. Dazu gibt man sich die Volumenkraft $B_t \in C(\bar{\mathfrak{B}}, \mathbb{R}^3)$ und die Randverschiebung $U_t^\partial \in C^2(\partial\mathfrak{B}, \mathbb{R}^3)$ sowie zwei Funktionen $U^o, V^o \in C^2(\bar{\mathfrak{B}}, \mathbb{R}^3)$ vor¹ und ermittelt dann die eindeutige Lösung von (2.1) mit der Randbedingung (2.2) und den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} U_0 &= U^o \\ \dot{U}_0 &= V^o. \end{aligned}$$

Aus Gleichung (2.3) ergibt sich dann die zu B_t und U_t^∂ zugehörige Oberflächenspannung Θ_t^∂ .

Die Darstellung von Elementen aus der Verhaltensrelation des elastischen Körpers als Lösungen einer Rand- und Anfangswertaufgabe schafft den Anschluß an die Beschreibung der Methode der Finiten Elemente in Büchern wie [15], [5] und [31].

Bei der FEM wird eine Integralnorm benutzt, bzgl. der $C^2(\bar{\mathfrak{B}}, \mathbb{R}^3)$ nicht vollständig ist. Außerdem werden oft nur **stückweise** glatte Ansatzfunktionen verwendet, die zwar stetig, jedoch nicht überall differenzierbar sind.

Diese Hilfsmittel sind nur dann sinnvoll anwendbar, wenn die einschränkenden Bedingungen der Verhaltensrelation in zweierlei Weise abgeschwächt werden. Zum einen wird (2.1) eine Variationsaufgabe zugeordnet, in der nur noch erste Ableitungen des Ortes auftreten, zum anderen werden die Ortsableitungen durch verallgemeinerte Ableitungen ersetzt.

Sei $U_t \in C^2(\bar{\mathfrak{B}}, \mathbb{R}^3)$ zweimal differenzierbar durch die Zeit t parametrisiert. Die Funktion U_t erfüllt die partielle Differentialgleichung (2.1) genau dann, wenn die Gleichung

$$\int_{\mathfrak{B}} \langle \rho_{\text{ref}}(A - B) - \text{div}(\mathbf{C} \mathbf{D}U_t), \phi \rangle \, dv = 0 \quad (2.6)$$

für alle stetigen Funktionen ϕ auf $\bar{\mathfrak{B}}$ gilt. (Das sieht man sofort ein, wenn man $\phi := \rho_{\text{ref}}(A - B) - \text{div}(\mathbf{C} \mathbf{D}U_t)$ wählt. Ist $|\phi|^2$ an einer Stelle $X \in \mathfrak{B}$ positiv, so auch in einer ganzen Umgebung von X , und das Integral über $|\phi|^2$ ist ebenfalls positiv.) Man kann sich bei den Testfunktionen ϕ sogar auf die beliebig oft differenzierbaren Funktionen beschränken, deren Ableitungen sich stetig auf den Rand fortsetzen lassen. Der Raum dieser Funktionen wird mit $C^\infty(\bar{\mathfrak{B}}, \mathbb{R}^3)$ bezeichnet.

Mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{B}} \langle \text{div}(\mathbf{C} \mathbf{D}U_t), \phi \rangle \, dv &= \int_{\mathfrak{B}} \sum_{ijkl} (\partial_j \mathbf{C}_{ijkl} \partial_k U_t) \phi_i \, dv \\ &= \int_{\partial\mathfrak{B}} \sum_{ijkl} \nu_j \mathbf{C}_{ijkl} (\partial_k U_t) \phi_i \, da - \int_{\mathfrak{B}} \sum_{ijkl} (\partial_j \phi_i) \mathbf{C}_{ijkl} \partial_k U_t \\ &= \int_{\partial\mathfrak{B}} \langle \phi, \mathbf{C}(\mathbf{D}U)\nu \rangle \, da - \int_{\mathfrak{B}} (\mathbf{D}\phi) \mathbf{C}(\mathbf{D}U) \, dv \end{aligned}$$

¹Die Vorgaben von U_t^∂ , U^o und V^o müssen miteinander verträglich sein. Das heißt für Punkte $X \in \partial\mathfrak{B}$ auf dem Rand müssen die stetigen Fortsetzungen von U^o und V^o auf $\bar{\mathfrak{B}}$ mit U_0^∂ bzw. \dot{U}_0^∂ übereinstimmen.

läßt sich die Gleichung (2.6) umformen in die Gleichung

$$\int_{\mathfrak{B}} \rho_{\text{ref}} \langle A - B, \phi \rangle dv - \int_{\partial \mathfrak{B}} \langle \phi, (\mathbf{C} DU) \nu \rangle da + \int_{\mathfrak{B}} (\mathbf{D}\phi) \mathbf{C}(DU) dv = 0$$

in der nur noch erste Ableitungen von U_t bzgl. des Ortes auftreten. Ersetzt man den Integranden des Oberflächenintegrals durch die rechte Seite von (2.3), so erhält man die Variationsgleichung

$$\int_{\mathfrak{B}} \rho_{\text{ref}} \langle A - B, \phi \rangle dv - \int_{\partial \mathfrak{B}} \langle \phi, \Theta_t^\partial \rangle da + \int_{\mathfrak{B}} (\mathbf{D}\phi) \mathbf{C}(DU_t) dv = 0, \quad (2.7)$$

die für alle Funktionen $\phi \in C^\infty(\bar{\mathfrak{B}}, \mathbb{R}^3)$ erfüllt sein soll. Aus der Herleitung erkennt man, daß jede Lösung der Bewegungsgleichung (2.1) eine Lösung der Variationsgleichung (2.7) ist. Außerdem ist eine Lösung U_t der Variationsgleichung auch eine Lösung der Bewegungsgleichung, falls die Randdaten B und Θ^∂ und die Lösung U_t hinreichend glatt sind (siehe hierzu [31]).

Die Variationsaufgabe (2.7) ist jedoch im Vergleich zur Bewegungsgleichung (2.1) auch unter schwächeren Differenzierbarkeitsanforderungen an die Lösung sinnvoll gestellt. So muß U_t nur noch einmal stetig in den Ortsvariablen differenzierbar sein.

Auch wenn nur noch die einmalige stetige Differenzierbarkeit der Lösung gefordert wird, können damit noch nicht die bei der FEM angesetzten zwar stetigen jedoch nur stückweise differenzierbaren Funktionen gerechtfertigt werden. Erst eine Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffes im Sobolevschen Sinne rechtfertigt die Verwendung solcher Ansatzfunktionen für das Variationsproblem (2.7).

Ausgangspunkt für die Definition von verallgemeinerten Ableitungen ist die partielle Integration. Sind f und ϕ partiell in der ersten Koordinatenrichtung differenzierbare Funktionen auf \mathfrak{B} , deren partielle Ableitungen quadratisch integrierbar sind, so gilt

$$\int_{\mathfrak{B}} (\partial_1 f) \phi dv = \int_{\partial \mathfrak{B}} f \phi \nu_1 da - \int_{\mathfrak{B}} f (\partial_1 \phi) dv.$$

Dabei ist ∂_1 die Ableitung in die erste Koordinatenrichtung und ν_1 die erste Komponente des äußeren Einheitsnormalenfeldes an \mathfrak{B} . Verschwindet ϕ auf dem Rand, so entfällt das Oberflächenintegral auf der rechten Seite und man erhält

$$\int_{\mathfrak{B}} (\partial_1 f) \phi dv = - \int_{\mathfrak{B}} f (\partial_1 \phi) dv.$$

Diese Gleichung wird zur Definition der verallgemeinerten Ableitung einer Funktion in die erste Koordinatenrichtung und analog in die anderen beiden Koordinatenrichtungen benutzt.

Eine quadratisch integrierbare Funktion ist im verallgemeinerten Sinne in i -Richtung ($i = 1, 2, 3$) differenzierbar, falls es eine quadratisch integrierbare Funktion g gibt, die der Gleichung

$$\int_{\mathfrak{B}} g \phi dv = \int_{\mathfrak{B}} f \partial_i \phi dv$$

für alle Funktionen $\phi \in C_0^\infty(\mathfrak{B})$ genügt. (Hierbei ist $C_0^\infty(\mathfrak{B})$ der Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in \mathfrak{B} .) Die Funktion g heißt dann verallgemeinerte Ableitung von f in Richtung i und wird mit $\partial_i f$ bezeichnet. Der Raum aller im verallgemeinerten Sinne differenzierbaren Funktionen wird

mit $H^1(\mathfrak{B})$ bezeichnet. Komponentenweise lassen sich diese Begriffe auch auf vektorwertige Funktionen übertragen, in diesem Fall wird dann $H^1(\mathfrak{B}, \mathbb{R}^3)$ statt $H^1(\mathfrak{B})$ geschrieben. Mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathfrak{B}} \langle f(x), g(x) \rangle dv + \sum_{i=1}^3 \int_{\mathfrak{B}} \langle \partial_i f(x), \partial_i g(x) \rangle dv$$

(und der Identifikation von Funktionen f und g mit $\int_{\mathfrak{B}} |f - g| dv = 0$) wird dieser Raum zu einem Hilbertraum. Für Funktionen aus $C^1(\mathfrak{B}, \mathbb{R}^3)$ stimmt die gewöhnliche Ableitung mit der verallgemeinerten überein.

Jedoch sind auch die bei der FEM verwendeten stückweise differenzierbaren Ansatzfunktionen im verallgemeinerten Sinne differenzierbar (siehe [9]). Dort, wo die klassische Ableitung für die stückweise differenzierbaren Ansatzfunktionen existiert, stimmt sie mit der verallgemeinerten Ableitung überein.

Mit Hilfe der verallgemeinerten Ableitungen wird die Variationsaufgabe (2.7) wie folgt weiter abgeschwächt. Finde $U_t \in H^1(\mathfrak{B}, \mathbb{R}^3)$ so, daß die Gleichung

$$\int_{\mathfrak{B}} \rho_{\text{ref}} \langle A - B, \phi \rangle dv - \int_{\partial \mathfrak{B}} \langle \phi, \Theta_t^\partial \rangle da + \int_{\mathfrak{B}} (\mathbf{D}\phi) \mathbf{C} (\mathbf{D}U_t) dv = 0 \quad (2.8)$$

für alle $\phi \in H^1(\mathfrak{B}, \mathbb{R}^3)$ erfüllt ist.

Um dieses Problem der Numerik zugänglich zu machen, muß man sich bei der Suche nach der Lösung U_t auf einen endlichdimensionalen Untervektorraum V von $H^1(\mathfrak{B}, \mathbb{R}^3)$ beschränken. Die Funktionen aus V werden als *Ansatzfunktionen* bezeichnet und V heißt *Ansatzraum*. Die Gleichung 2.7 ist im Allgemeinen mit der eingeschränkten Auswahl von Ansatzfunktionen U_t nicht mehr für alle Funktionen $\phi \in C^\infty(\mathfrak{B}, \mathbb{R}^3)$ erfüllbar. Deshalb wird die Gültigkeit der Gleichung (2.7) nur für Funktionen $\phi \in V$ aus dem Ansatzraum verlangt. Im folgenden wird ein Beispiel für einen solchen Ansatzraum vorgestellt.

2.2 Finite Elemente

Zur Konstruktion des Ansatzraumes V wird der Körper \mathfrak{B} in Teilgebiete \mathfrak{B}_i ($i = 1, \dots, N_E$) mit einfachen Grundformen (Tetraeder, Pyramide, Hexaeder) zerlegt. Die Teilgebiete werden als *Elemente* bezeichnet.

Elemente mit gemeinsamen Randpunkten sollen entweder genau eine Ecke, eine ganze Kante oder eine ganze Seite gemeinsam haben. Die Ecken der Elemente bilden die Gitterpunkte und die Kanten der Elemente bilden die Gitterstäbe eines Gitters. Die Gitterpunkte seien mit Zahlen $1, \dots, N_G$ durchnummeriert. Der Ortsvektor des Gitterpunktes mit Nummer $i \in \{1, \dots, N_G\}$ sei mit X_i bezeichnet.

Alle Elemente mit gleicher Grundform werden als Bilder eines polyedrischen Einheitsgebietes G (z. B. Einheitstetraeder $G_\Delta := \{\xi \in [0, 1]^3 | \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leq 1\}$ oder Einheitswürfel $G_\square := [0, 1]^3$) dargestellt. Die zur Abbildung eines Einheitsgebietes auf ein Element benutzte Funktion wird als *natürliche Parametrisierung* bezeichnet.

Die als nächstes eingeführten *Formfunktionen* sind die Grundbausteine zur Konstruktion der natürlichen Parametrisierung wie auch zur stückweisen Definition von Ansatzfunktionen.

Zu jeder Ecke p eines Einheitsgebietes G ist eine Formfunktion $\zeta_p : G \rightarrow [0, 1]$ erklärt. Das ist eine Polynomfunktion auf G , die in der Ecke p den Wert Eins annimmt

und in allen anderen Ecken von G gleich Null ist

$$\zeta_p(p) = 1, \quad \zeta_p(p') = 0, \quad \text{falls } p' \text{ eine von } p \text{ verschiedene Ecke von } G \text{ ist.}$$

In dieser Arbeit werden nur Formfunktionen genutzt, für die die Einschränkungen auf Kanten von G affin-linear sind. In jedem Punkt $\xi \in G$ des Einheitsgebietes ist die Summe aller Formfunktionen von G gleich Eins

$$\sum_{p \text{ Ecke von } G} \zeta_p(\xi) = 1 \quad (\forall \xi \in G).$$

Damit eignen sich die Formfunktionen als Koeffizienten von Konvexkombinationen. Weiter unten werden die Formfunktionen für einige Einheitsgebiete vorgestellt.

Für jedes Element \mathfrak{B}_i wird eine Vorschrift κ_i festgelegt, nach der den Ecken p des Einheitsgebietes topologisch verträglich die Gitterpunktnummern $\kappa_i(p) \in \{1, \dots, N_G\}$ der Ecken von \mathfrak{B}_i zugeordnet werden. Topologisch verträglich meint dabei, daß zwei Ecken p und p' des Einheitsgebietes genau dann durch eine Kante des Einheitsgebietes verbunden sein sollen, wenn die Gitterpunkte mit den Nummern $\kappa_i(p)$ und $\kappa_i(p')$ durch eine Kante von \mathfrak{B}_i miteinander verbunden sind (wie weiter unten zu sehen sein wird, ergibt sich beim Pyramidenelement eine Ausnahme von dieser Regel).

Die natürliche Parametrisierung $\chi_i : G \rightarrow \mathfrak{B}_i$ von \mathfrak{B}_i ist die konvexe Summe

$$\chi_i(\xi) := \sum_{p \text{ Ecke von } G} X_{\kappa_i(p)} \zeta_p(\xi) \quad (2.9)$$

der Eckpunkte $X_{\kappa_i(p)}$ des Elements \mathfrak{B}_i . Für eine weitgehend freie Wahl der Lage der Elementecken $X_{\kappa_i(p)}$ ist die so definierte Abbildung bijektiv (die Spitze von Pyramidenelementen bildet hier wieder eine Ausnahme, die jedoch keine schwerwiegenden Probleme aufwirft). Zum Beispiel in [6] wird die Bijektivität der natürlichen Parametrisierung ansatzweise diskutiert, in dieser Arbeit soll nicht weiter darauf eingegangen werden. Die durch Gleichung (2.9) einem Punkt $x \in \mathfrak{B}_i$ zugeordneten Zahlen ξ mit $x = \chi(\xi)$ werden auch als *natürliche Koordinaten* von x bezeichnet.

Die Form des Elements \mathfrak{B}_i wird erst durch das volle Bild $\mathfrak{B}_i = \chi_i(G)$ der natürlichen Parametrisierung von \mathfrak{B}_i festgelegt.

Die Eigenschaften der Formfunktionen ζ_p sichern, daß jeder Eckpunkt p von G auf den zugehörigen Eckpunkt $X_{\kappa_i(p)}$ von \mathfrak{B}_i abgebildet wird und daß eine Kante $\overline{pp'}$ des Einheitsgebietes auf die Verbindungsstrecke $\overline{X_{\kappa_i(p)} X_{\kappa_i(p)'}}$ der zugehörigen Punkte $X_{\kappa_i(p)}$ und $X_{\kappa_i(p')}$ abgebildet wird. Daß zwei Elemente mit mehr als zwei gemeinsamen Eckpunkten genau aneinanderpassen (nicht überlappen und zwischen ihnen keine Lücke bleibt) ist nicht selbstverständlich, sondern wird erst durch die Festlegung der Formfunktionen für die Einheitsgebiete abgesichert (siehe weiter unten).

Die Formfunktionen können auch genutzt werden, um stückweise auf den Elementen \mathfrak{B}_i die Ansatzfunktionen $U : \mathfrak{B}_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ zu definieren. Zunächst werden die Funktionswerte $U_j \in \mathbb{R}^3$ in den Ecken X_j des Elements vorgegeben. Für einen Punkt $x \in \mathfrak{B}_i$ mit den natürlichen Koordinaten $\xi \in G$ wird dann

$$U(x) := \sum_p U_{\kappa_i(p)} \zeta_p(\xi) \quad (2.10)$$

gesetzt.

Wiederum sichern die Eigenschaften der Formfunktionen, daß die so definierte Funktion U in den Ecken des Elements wirklich die vorgegebenen Werte U_j annimmt.

Ein Element \mathfrak{B}_i zusammen mit einer Menge von darauf definierten glatten Ansatzfunktionen wird als *finites Element* bezeichnet. Sind die Ansatzfunktionen U des finiten Elements entsprechend (2.10) auf der Grundlage der Formfunktionen des Elements konstruiert, so wird es als *isoparametrisches* finites Element bezeichnet.

Damit die FEM-Modellgleichungen für die Bewegung eines elastischen Körpers im Inertialsystem einfach in Modellgleichungen für die Bewegung im beschleunigten Bezugssystem übertragen werden können, ist es wesentlich, daß bei der Vernetzung des Körpers nur isoparametrische finite Elemente genutzt werden. Der Grund hierfür wird im Abschnitt 2.4 deutlich werden.

Aus den finiten Elementen kann unter Berücksichtigung der Stetigkeitsforderung $V \subset C(\bar{\mathfrak{B}}, \mathbb{R}^3)$ der Ansatzraum V zusammengesetzt werden.

In dieser Arbeit soll ein gleichwertiger Weg beschritten werden, der über Knotenbasisfunktionen (in [9] als „nodale Basisfunktion“ bezeichnet) führt.

Jedem Gitterpunkt X_j ($j = 1, \dots, N_G$) wird eine *Knotenbasisfunktion* $\eta_j : \mathfrak{B} \rightarrow [0, 1]$ zugeordnet, die im Gitterpunkt j den Wert Eins annimmt und in allen anderen Gitterpunkten gleich Null ist. Diese Knotenbasisfunktion wird aus den Formfunktionen für die Elemente \mathfrak{B}_i zusammengesetzt, von denen X_j ein Eckpunkt ist. Auf den weiter von X_j entfernten Elementen, also solchen, die X_j nicht als Ecke haben, wird η_j einfach durch Null fortgesetzt.

Genauer wird für Punkte x aus einem Element \mathfrak{B}_i , zu dessen Eckpunkten X_p zählt,

$$\eta_j(x) := \zeta_p(\xi)$$

gesetzt, wobei p die X_j zugeordnete Ecke des Einheitsgebietes von \mathfrak{B}_i ist ($j = \kappa_i(p)$) und ξ die natürlichen Koordinaten von x im Element \mathfrak{B}_i sind ($x = \sum_{\bar{p}} X_{\kappa_i(\bar{p})} \zeta_{\bar{p}}(\xi)$).

Die Ansatzfunktionen $U \in V$ sind genau die Funktionen, die sich als konvexe Summe

$$U(x) = \sum_{j=1}^{N_G} U_j \eta_j(x) \quad (2.11)$$

mit $U_j \in \mathbb{R}^3$ ($j = 1, \dots, N_G$) schreiben lassen. Da in einem Gitterpunkt X_j nur die Knotenbasisfunktion η_j gleich Eins ist und alle anderen Knotenbasisfunktionen $\eta_{\bar{j}}$ gleich Null sind, gilt $U(X_j) = U_j$. Mit den Vektoren U_j lassen sich also die Werte von U in den Gitterpunkten X_j vorschreiben. Daß U für jede Wahl von $U_j \in \mathbb{R}^3$ ($j = 1, \dots, N_G$) eine stetige Ansatzfunktion ist, wird durch die gleichen Eigenschaften der Formfunktionen gewährleistet, die absichern, daß zwei Elemente mit mehr als zwei gemeinsamen Eckpunkten genau aneinanderpassen.

Das Tetraederelement

Das zum Tetraederelement gehörige Einheitsgebiet ist das Einheitstetraeder

$$G_{\Delta} := \{\xi \in [0, 1]^3 \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leq 1\}.$$

Um die Formfunktion ζ_p zu einem Eckpunkt p des Einheitstetraeders aufzustellen, kann die Gleichung der von den anderen drei Eckpunkten aufgespannten Ebene

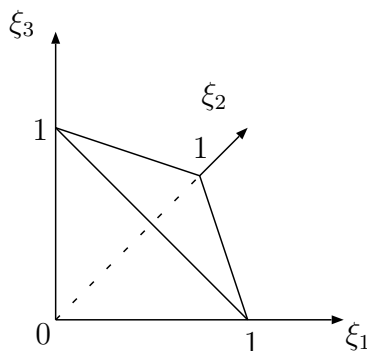


Abbildung 2.1: Das Einheitstetraeder.

genutzt werden. Man findet die affin-linearen Gleichungen

$$\zeta_{(0,0,0)}(\xi) = 1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3,$$

$$\zeta_{(1,0,0)}(\xi) = \xi_1,$$

$$\zeta_{(0,1,0)}(\xi) = \xi_2,$$

$$\zeta_{(0,0,1)}(\xi) = \xi_3.$$

Man übersieht sofort, daß die so definierten Formfunktionen wirklich alle für Formfunktionen geforderten Eigenschaften haben (Koeffizienten von Konvexkombinationen; in einer Ecke p ist $\zeta_p(p) = 1$ und alle anderen Formfunktionen sind gleich Null; Einschränkungen auf Kanten sind affin-linear).

Im Zusammenhang mit der Behandlung von Pyramidenelementen wird noch eine Bemerkung zur Parametrisierung von Punkten auf Dreiecksrandflächen fallen.

Das Hexaederelement

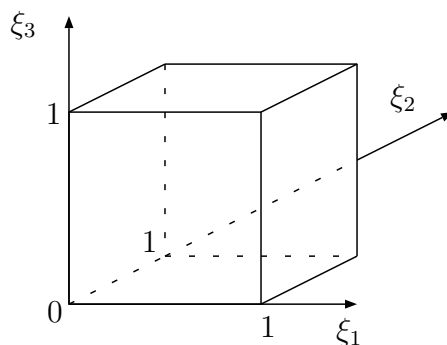


Abbildung 2.2: Der Einheitswürfel.

Das Grundgebiet für Hexaederelemente ist der Einheitswürfel

$$G_{\square} := [0, 1]^3.$$

Mit affin-linearen Abbildungen kann der Einheitswürfel höchstens zu einem Parallelotop verzerrt werden. Um den Einheitswürfel via natürlicher Parametrisierung

auf Hexaeder mit (weitgehend) beliebig liegenden Eckpunkten abbilden zu können, müssen die Formfunktionen Polynome höheren Grades sein. Eine Möglichkeit solche Formfunktionen aufzustellen, wird im folgenden geometrisch anschaulich diskutiert. Zu einem Punkt $\xi \in G_{\square}$ sollen die Werte der Formfunktionen $\zeta_{(0,0,0)}, \dots, \zeta_{(1,1,1)}$ fest-

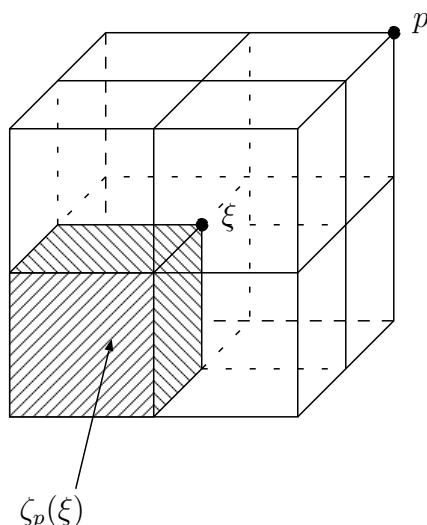


Abbildung 2.3: Festlegung der Formfunktion ζ_p an der Stelle ξ .

gelegt werden. Die achsenparallelen Ebenen, auf denen der Punkt ξ liegt, unterteilen den Einheitswürfel in acht Quader. Der Wert $\zeta_p(\xi)$ der zu einer Ecke p gehörigen Formfunktion ζ_p an der Stelle ξ ist gleich dem Volumen des p räumlich diagonal gegenüberliegenden Quaders (siehe Bild 2.3). So findet man

$$\begin{aligned}\zeta_{(0,0,0)}(\xi) &= (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3), \\ \zeta_{(1,0,0)}(\xi) &= \xi_1(1 - \xi_2)(1 - \xi_3), \dots, \\ \zeta_{(1,1,1)}(\xi) &= \xi_1\xi_2\xi_3.\end{aligned}$$

Für jeden der acht Teilquader liegt das Volumen zwischen Null und Eins, außerdem ist die Summe der Volumina aller Teilquader gleich dem Volumen des Einheitswürfels

$$\sum_{p \text{ Ecke von } G_{\square}} \zeta_p(\xi) = 1.$$

Die Zahlen $\zeta_p(\xi)$ $p = (0, 0, 0), \dots, (1, 1, 1)$ eignen sich also als Koeffizienten für Konvexkombinationen.

Ist ξ selber eine Ecke des Einheitswürfels, so ist der Teilquader mit Volumen $\zeta_{\xi}(\xi)$ gleich dem Einheitswürfel. Damit gilt in diesem Fall $\zeta_{\xi}(\xi) = 1$ und die Formfunktionen ζ_p zu allen anderen Ecken p von G_{\square} sind an der Stelle ξ gleich Null.

Auf den Kanten ist jeweils nur eine der natürlichen Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 veränderlich, damit sind die Einschränkungen der Formfunktionen auf die Kanten affin-linear.

Die für den Einheitswürfel definierten Formfunktionen erfüllen also alle bisher an Formfunktionen gestellten Forderungen. Im folgenden soll noch auf Eigenschaften der Formfunktionen in den Randpunkten des Einheitswürfels eingegangen werden.

Für Punkte ξ in einer Randfläche A des Einheitswürfels können nur die Formfunktionen zu den Ecken von A ungleich Null sein. Die Randfläche A liegt in einer

Koordinatenfläche der natürlichen Koordinaten ξ . Die zwei anderen Koordinatenflächen von ξ teilen A in vier Rechteckflächen (siehe Bild 2.4). Der Wert der zu einem Eckpunkt p von A gehörigen Formfunktion $\zeta_p(\xi)$ ist gleich der Fläche des p diagonal gegenüberliegenden Rechtecks. Es seien p_1, p_2, p_3, p_4 die vier Ecken der

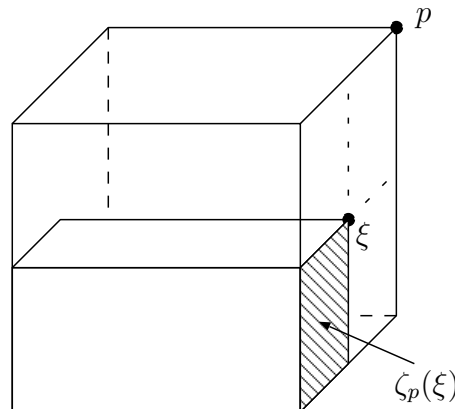


Abbildung 2.4: Formfunktionen für Punkte ξ auf einer Randfläche A des Einheitswürfels.

Fläche A . Die Ecken seien *topologisch verträglich* numeriert, das heißt, daß Ecken mit aufeinanderfolgenden Nummern durch eine Kante von A miteinander verbunden sind. Aus der geometrischen Interpretation der natürlichen Parametrisierung erkennt man ohne Rechnung, daß sich für jede Randfläche A des Einheitswürfels und für jede topologisch verträgliche Numerierung der Eckpunkte p_1, p_2, p_3, p_4 von A die gleiche Menge

$$K := \{(\zeta_{p_1}(\xi), \zeta_{p_2}(\xi), \zeta_{p_3}(\xi), \zeta_{p_4}(\xi)) \mid \xi \in A\}$$

ergibt. Das führt zu folgendem Schluß.

Gegeben seien vier Raumpunkte X_1, X_2, X_3, X_4 . Dann ist die durch die natürliche Parametrisierung

$$\chi(\xi) = \sum_{k=1}^4 X_k \zeta_{p_k}(\xi) \quad \forall \xi \in A$$

beschriebene Fläche A' unabhängig von der Wahl der Randfläche A des Einheitswürfels und unabhängig von der Wahl der topologisch verträglichen Numerierung der Randpunkte von A .

Da die Parametrisierung χ bijektiv sein soll, gibt es zu jedem Punkt x aus A' genau ein Koeffiziententupel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ aus der oben definierten Menge K , mit dem sich x in der Form

$$x = \sum_{k=1}^4 X_k \alpha_k$$

darstellen läßt. Diese Koeffizienten sind dann natürlich von der zur Parametrisierung gewählten Randfläche A des Einheitswürfels und von der topologisch verträglichen Numerierung der Randpunkte von A unabhängig.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß

- eine Viereckrandfläche eines durch den Einheitswürfel natürlich parametrisierten Elements schon durch ihre Randpunkte festgelegt ist,

- die Koeffizienten der Konvexkombinationen, die bei der Parametrisierung einer solchen Randfläche auftreten, nur von der Lage der Ecken der Randfläche und vom parametrisierten Punkt abhängen.

Das Pyramidenelement

Das Pyramidenelement ist ein Beispiel für ein Element, das durch Zusammenfügen von Ecken aus dem Hexaederelement gewonnen wird. Das Einheitsgebiet ist wieder der Einheitswürfel. Nur werden bei der natürlichen Parametrisierung alle Punkte der Deckfläche des Einheitswürfels auf den gleichen Raumpunkt X_s , die Pyramidenspitze, abgebildet.

$$\chi_i(\xi) = \left(\sum_{\text{Punkte } p \text{ der Grundfläche von } G_{\square}} X_{\kappa_i(p)} \zeta_p(\xi) \right) + X_{\kappa_i(s)} \zeta_s(\xi)$$

mit

$$\zeta_s(\xi) = \sum_{\text{Punkte } p \text{ der Deckfläche von } G_{\square}} \zeta_p(\xi).$$

Das läßt sich geometrisch so deuten, daß der Einheitswürfel entsprechend Bild 2.5 in fünf Quader unterteilt wird. Wobei der zur Pyramidenspitze X_s gehörende Quader durch Zusammenfassen der auf der Grundfläche aufliegenden Quader gebildet wird. In der Pyramidenspitze ist diese Parametrisierung singulär. Alle Punkte der

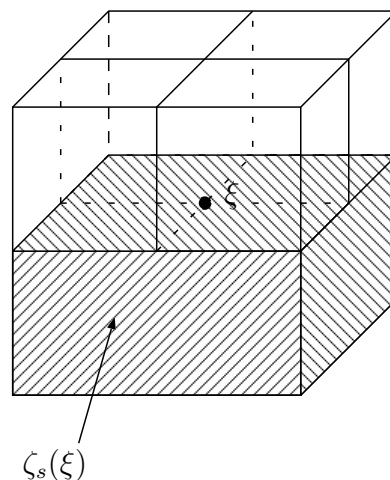


Abbildung 2.5: Parametrisierung von Pyramidenelementen durch den Einheitswürfel.

Deckfläche des Einheitswürfels werden auf die Pyramidenspitze abgebildet. Jedoch sind die Koeffizienten der Konvexkombination $\zeta_p(\xi) = 0$ und $\zeta_s(p) = 1$ in der Pyramidenspitze eindeutig gegeben (das ist sofort anhand des Bildes einzusehen) und alle Integrale, die im Zusammenhang mit der FEM benötigt werden, existieren bei dieser Parametrisierung.

Für die Parametrisierung der viereckigen Grundfläche des Pyramidenelements bleiben alle für Randflächen des Hexaederelements gemachten Aussagen gültig, da dort die gleichen Formfunktionen wie beim Hexaederelement genutzt werden.

Für die dreieckigen Randflächen A' von Pyramidenelementen wie auch von Tetraederelementen ist eine noch einfachere Argumentation möglich.

Es ist davon auszugehen, daß die Ecken von A' affin unabhängig sind. Die (wesentlichen) Kanten des Einheitsgebietes werden auf die Verbindungsstrecken der Ecken des Elements abgebildet. Für Punkte auf einer Randfläche des Elements können nur die Koeffizienten zu den Eckpunkten dieser Randfläche ungleich Null sein. Damit ist klar, daß eine Elementrandfläche mit drei Eckpunkten die von den Eckpunkten gebildete ebene Dreiecksfläche ist.

Außerdem ist aus der linearen Algebra folgendes bekannt. Wird ein Punkt x als Konvexkombination von affin unabhängigen Punkten X_1, X_2, X_3 dargestellt, so sind die Koeffizienten der Konvexkombination durch x und die Punkte X_1, X_2, X_3 eindeutig bestimmt.

In Analogie zum Hexaederelement läßt sich zusammenfassend sagen, daß

- eine Dreieckrandfläche eines Elements schon durch ihre Eckpunkte festgelegt ist,
- die Koeffizienten der Konvexkombinationen, die bei der Parametrisierung einer solchen Randfläche auftreten, nur von der Lage der Ecken der Randfläche und vom parametrisierten Punkt abhängen.

Benachbarte Elemente

Bei Elementen mit vier gemeinsamen Eckpunkten sind die jeweils zu diesen Eckpunkten gehörigen Randflächen Bilder von Einheitswürfelrandflächen unter natürlichen Parametrisierungen. Es ist davon auszugehen, daß die Randflächen topologisch äquivalent sind, d. h. daß bei beiden Randflächen die gleichen Eckpunkte durch Kanten miteinander verbunden sind. Weiter oben wurde festgestellt, daß diese zwei (topologisch äquivalenten) Randflächen mit gleichen Eckpunkten einander gleich sein müssen. Die zwei Elemente haben also eine gemeinsame zu den vier Eckpunkten gehörige Randfläche A und schließen damit genau aneinander an.

Sei η_j die Knotenbasisfunktion zu einem Eckpunkt X_j von A . Die Knotenbasisfunktionen wurden auf der Grundlage der natürlichen Parametrisierungen der einzelnen Elemente definiert. Punkte x auf der gemeinsamen Randfläche A können bzgl. der natürlichen Parametrisierungen der beiden benachbarten Elemente parametrisiert werden. Wie gleich gezeigt wird, ist der Wert von η_j für solche Punkte dennoch eindeutig definiert.

Ein Punkt x aus der Randfläche A wird durch genau eine Konvexkombination

$$x = \sum_{X_j \text{ Eckpunkt von } A} \alpha_j X_j$$

mit genau einem Koeffiziententupel $(\alpha_j)_j$ aus der oben definierten Menge K dargestellt. Der Wert $\eta_j(x)$ an der Stelle x ist gleich dem Koeffizienten α_j zum Eckpunkt X_j . Wie oben erörtert, hängt dieser Koeffizient nur von der Lage der Eckpunkte X_j der Randfläche A ab und nicht von der gewählten natürlichen Parametrisierung. Damit ist die Wohldefiniertheit und zusätzlich auch die Stetigkeit der Knotenbasisfunktion η_j für Punkte x auf der gemeinsamen Randfläche gesichert.

Analoges gilt natürlich für benachbarte Elemente mit drei gemeinsamen Eckpunkten.

2.3 FEM-Systemgleichungen bzgl. Inertialsystemen

Die der Bewegungsgleichung bzgl. eines Inertialsystems zugeordnete endlichdimensionale Variationsaufgabe lautet

$$\int_{\mathfrak{B}} \rho_{\text{ref}} \langle \phi, A_t \rangle dv + \int_{\mathfrak{B}} (\text{D}\phi) \mathbf{C} (\text{D}U_t) dv = \int_{\mathfrak{B}} \langle \phi, B_t \rangle dv + \int_{\partial\mathfrak{B}} \langle \phi, \Theta_t^\partial \rangle da \quad (\forall \phi \in V), \quad (2.12)$$

wobei $U_t \in V$ das gesuchte Verschiebungsvektorfeld, $A_t = \ddot{U}_t$ das zugehörige Beschleunigungsfeld (im Inertialsystem), B_t eine vorgegebene Volumenkraft und Θ_t^∂ ein auf dem Rand von \mathfrak{B} vorgegebenes Oberflächenspannungsfeld sind (vgl. Gl. (2.8)).

Da die Knotenbasisfunktionen zeitunabhängig sind, ergeben sich die Knotenwerte der zeitlichen Ableitung

$$\frac{d}{dt} U_t = \frac{d}{dt} \left(\sum_{p=1}^{N_G} U_{t,p} \eta_p \right)$$

einer (durch die Zeit t differenzierbar parametrisierten) Funktion $U_t \in V$ einfach aus der zeitliche Ableitung $\frac{d}{dt} U_{t,p}$ der Knotenwerte von U_t . Damit ist auch die Funktion $A_t = \ddot{U}_t$ im Ansatzraum V enthalten.

Die Integrale auf der linken Seite von Gleichung (2.12) sind Bilinearformen

$$(\phi, A_t) \in V^2 \mapsto \int_{\mathfrak{B}} \rho_{\text{ref}} \langle \phi, A_t \rangle dv \quad (2.13)$$

$$(\phi, U_t) \in V^2 \mapsto \int_{\mathfrak{B}} (\text{D}\phi) \mathbf{C} (\text{D}U_t) dv \quad (2.14)$$

in den Variablen ϕ, A_t bzw. ϕ, U_t . Die Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung stellen Linearformen

$$\phi \in V \mapsto \int_{\mathfrak{B}} \langle \phi, B_t \rangle dv \quad (2.15)$$

$$\phi \in V \mapsto \int_{\partial\mathfrak{B}} \langle \phi, \Theta_t^\partial \rangle da$$

in der Variablen $\phi \in V$ dar.

Die Funktionen

$$\beta_{3(p-1)+d} := e_d \eta_p \quad (p = 1, \dots, N_G, d = 1, 2, 3) \quad (2.16)$$

mit den Knotenbasisfunktionen η_p und den Standardbasisvektoren $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ des \mathbb{R}^3 bilden eine Basis des Ansatzraumes V . Im vorhergehenden Abschnitt wurde festgestellt, daß sich jede Funktion $\phi \in V$ mit den Knotenwerten $\phi_p = \phi(X_p)$ ($p = 1, \dots, N_G$) in der Form

$$\phi = \sum_{p=1}^{N_G} \phi_p \eta_p$$

darstellen läßt. Der Koordinatenvektor von ϕ bzgl. der Basis $(\beta_i)_{i=1, \dots, N_G}$ soll mit $\check{\phi}$ bezeichnet werden. Aus der letzten Gleichung ergibt sich

$$\phi_p = (\check{\phi}_{3(p-1)+1}, \check{\phi}_{3(p-1)+2}, \check{\phi}_{3(p-1)+3}).$$

In dem Vektor $\check{\phi}$ sind also nacheinander die Koordinaten der Knotenwerte von ϕ aufgelistet. Deshalb sollen die Komponenten von $\check{\phi}$ auch als Knotenwerte (Knotenverschiebungen, Knotengeschwindigkeiten, ...) bezeichnet werden. An den Stellen,

wo es wesentlich ist, wird es aus dem Kontext hervorgehen, welche der Größen $(\phi_p)_{p=1,\dots,N_G}$ oder $\check{\phi}$ gemeint sind.

Die Koordinatisierung der Bilinearformen (2.13,2.14) nach der Basis $(\beta_i)_{i=1,\dots,3N_G}$ ergibt die Matrizen $M, K \in \mathbb{R}^{3N_G \times 3N_G}$ mit den Elementen

$$M_{i,j} = \int_{\mathfrak{B}} \rho_{\text{ref}} \langle \beta_i, \beta_j \rangle dv \text{ bzw.}$$

$$K_{i,j} = \int_{\mathfrak{B}} (\text{D}\beta_i) \mathbf{C} (\text{D}\beta_j) dv.$$

Die Matrizen M und K heißen Massen- bzw. Steifigkeitsmatrix des elastischen Systems.

Die Koordinatisierung der Linearformen (2.15) nach der Basis $(\beta_i)_{i=1,\dots,3N_G}$ ergibt die Vektoren $\check{f}_t, \check{B}_t \in V$ mit den Komponenten

$$\check{B}_{t,i} = \int_{\mathfrak{B}} \rho_{\text{ref}} \langle \beta_i, B_t \rangle dv \text{ bzw.}$$

$$\check{f}_{t,i} = \int_{\partial\mathfrak{B}} \langle \beta_i, \Theta_t^\partial \rangle da.$$

Schließlich lautet das Variationsproblem (2.12) in Koordinaten

$$\check{\phi}^\top M \check{A}_t + \check{\phi}^\top K \check{U}_t = \check{\phi}^\top \check{B}_t + \check{\phi}^\top \check{f}_t \quad (\forall \check{\phi} \in \mathbb{R}^{3N_G})$$

und zusammengefaßt

$$\check{\phi}^\top (M \check{A}_t + K \check{U}_t - \check{B}_t - \check{f}_t) = 0 \quad (\forall \check{\phi} \in \mathbb{R}^{3N_G}).$$

Somit das Variationsproblems äquivalent zur Gleichung

$$M \check{A}_t + K \check{U}_t = \check{B}_t + \check{f}_t, \quad (2.17)$$

die als *FEM-System* bezeichnet wird.

Mit den Knotenwerten

$$A_{t,p} = \check{U}_{t,p} \quad (2.18)$$

für das Beschleunigungsfeld ergibt sich aus (2.17) das Algebro-Differentialgleichungssystem

$$M \check{\check{U}}_t + K \check{U}_t = \check{B}_t + \check{f}_t. \quad (2.19)$$

Man stellt leicht fest, daß die Massenmatrix M positiv definit und damit auch regulär ist². Damit hat das Differentialgleichungssystem (2.19) Index Null, ist also formal wie ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem behandelbar.

Sind die Funktionen U° und V° , die die Anfangsbedingungen für die Rand- Anfangswertaufgabe (2.1) beschreiben, im Ansatzraum V enthalten (wie es z. B. für $U^\circ = V^\circ = 0$ der Fall ist) so können diese Anfangsbedingungen direkt für das endlichdimensionale Variationsproblem (2.12) übernommen werden. Aus der Koordinatisierung von U° und V° ergeben sich dann die Anfangsbedingungen $\check{U}_0 = \check{U}^\circ$ und $\check{V}_0 = \check{V}^\circ$ für das Differentialgleichungssystem (2.19). Falls U° und V° stetige Funktionen aus $H^1(\mathfrak{B}, \mathbb{R}^3)$ sind, die nicht im Ansatzraum V enthalten sind, so müssen diese Anfangsbedingungen erst durch Funktionen aus dem Ansatzraum V approximiert werden, ehe sie als Anfangsbedingungen für das endlichdimensionale Variationsproblem genutzt werden können. Diese Approximation erfolgt mit der im nächsten Abschnitt vorgestellten Projektion Pr von $C(\mathfrak{B}, \mathbb{R}^3) \cap H^1(\mathfrak{B}, \mathbb{R}^3)$ auf V .

²... insofern die bereits geforderten Bedingungen erfüllt sind, daß die bei der Zerlegung von \mathfrak{B} genutzten Elemente \mathfrak{B}_i alle positives Volumen haben und für die Dichtefunktion $\rho_{\text{ref}} > 0$ gilt.

2.4 FEM-Systemgleichungen bzgl. beschleunigter Bezugssysteme

Das endlichdimensionale Variationsproblem für die Bewegung im beschleunigten Bezugssystem unterscheidet sich von dem für die Bewegung im Inertialsystem durch das transformierte Beschleunigungsfeld

$$\bar{A}_t = \bar{r}_t + (\dot{\bar{\Omega}} + \bar{\Omega}^2)(X + U_t) + 2\bar{\Omega}_t \dot{U}_t + \ddot{U}_t \quad (U_t \in V). \quad (2.20)$$

Zur näheren Untersuchung dieses Beschleunigungsfeldes wird die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Pr} : C(\bar{\mathfrak{B}}, \mathbb{R}^3) \cap H^1(\bar{\mathfrak{B}}, \mathbb{R}^3) &\rightarrow V \quad \text{mit} \\ \text{Pr}(\phi) &:= \sum_{p=1}^{N_G} \phi(X_p) \eta_p \end{aligned}$$

eingeführt.

Aus den Eigenschaften der Knotenbasisfunktionen ergeben sich für Pr folgende Fakten.

1. Die Abbildung Pr ist eine Projektion der stetigen Funktionen aus $H^1(\bar{\mathfrak{B}}, \mathbb{R}^3)$ auf den Ansatzraum, denn ist ϕ selber eine Ansatzfunktion, so gilt

$$\phi(x) = \sum_{p=1}^{N_G} \phi(X_p) \eta_p(x),$$

womit ϕ unter Pr auf sich abgebildet wird.

2. Die konstanten Funktionen $\phi(x) = c$ ($x \in \bar{\mathfrak{B}}$) sind wegen

$$\sum_{p=1}^{N_G} \phi(X_p) \eta_p(x) = c \underbrace{\sum_{p=1}^{N_G} \eta_p(x)}_{=1}$$

in V enthalten, werden also unter der Projektion Pr ebenfalls auf sich abgebildet.

3. Für lineare Abbildungen $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (also Multiplikationen mit einer Matrix $L \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$) gilt

$$\text{Pr}(L\phi)(x) = \sum_{p=1}^{N_G} L\phi(X_p) \eta_p(x) = L \text{Pr}(\phi).$$

4. Auch die identische Abbildung $\text{Id}_{\bar{\mathfrak{B}}} : x \in \bar{\mathfrak{B}} \mapsto x$ ist im Ansatzraum V vertreten und wird somit durch Pr auf sich abgebildet. Der Grund hierfür liegt in der Verwendung isoparametrischer finiter Elemente. Für die natürliche Parametrisierung der Elemente \mathfrak{B}_i werden die gleichen Formfunktionen ζ_p genutzt, wie für die Darstellung der Ansatzfunktionen $\phi \in V$. (Dabei seien mit p die Ecken

vom zu \mathfrak{B}_i gehörigen Grundgebiet G bezeichnet.) Sind $\xi \in G$ die natürlichen Koordinaten eines Punktes $x \in \mathfrak{B}_i$, so gilt definitionsgemäß die Gleichung

$$x = \sum_{p \text{ Ecke von } G} X_{\kappa_i(p)} \zeta_p(\xi).$$

Der Wert der zu einem Eckpunkt $X_{\kappa_i(p)}$ von \mathfrak{B}_i gehörigen Knotenbasisfunktion $\eta_{\kappa_i(p)}$ im Punkt x ist definitionsgemäß festgelegt zu

$$\eta_{\kappa_i(p)}(x) = \zeta_p(\xi).$$

Die Knotenbasisfunktionen zu Gitterpunkten, die nicht zu den Ecken von \mathfrak{B}_i gehören, sind im Punkt x gleich Null. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Pr}(\mathbf{Id}_{\mathfrak{B}})(x) &= \sum_{j=1}^{N_G} X_j \eta_j(x) \\ &= \sum_{p \text{ Ecke von } G} X_{\kappa_i(p)} \eta_{\kappa_i(p)}(x) \\ &= \sum_{p \text{ Ecke von } G} X_{\kappa_i(p)} \zeta_p(\xi) \\ &= x, \end{aligned}$$

womit gezeigt ist, daß $\mathbf{Id}_{\mathfrak{B}}$ eine Invariante unter Pr ist.

In der Gleichung (2.20) für das Beschleunigungsfeld A_t ist die Beschleunigung $\bar{\bar{r}}_t$ des Koordinatenursprungs als ein konstantes Vektorfeld auf \mathfrak{B} zu interpretieren und x steht für die identische Abbildung $\mathbf{Id}_{\mathfrak{B}} : x \mapsto x$. Daß die zeitlichen Ableitungen von Ansatzfunktionen $U_t \in V$ ebenfalls Ansatzfunktionen sind, wurde schon im vorhergehenden Abschnitt geklärt. In Gleichung (2.20) treten weiterhin nur Produkte von 3×3 -Matrizen (wie zum Beispiel Ω_t) mit Ansatzfunktionen X, U, \dot{U}, \ddot{U} auf. Also ist A_t nach der Eigenschaft (3) von Pr selber eine Ansatzfunktion und kann in der Form

$$A_t = \sum_p A_{t,p} \eta_p(x)$$

mit den Knotenwerten

$$A_{t,p} = A_t(X_p) = \bar{\bar{r}}_t + (\dot{\bar{\Omega}} + \bar{\Omega}^2)(X_p + U_{t,p}) + 2\bar{\Omega}_t \dot{U}_{t,p} + \ddot{U}_{t,p} \quad (2.21)$$

dargestellt werden.

Da A_t in dem Vektorraum V enthalten ist, auf dem die Bilinearform (2.13) definiert ist, bleibt das FEM-System (2.17) auch für die Bewegung im beschleunigten Koordinatensystem gültig. Nur in den Gleichungen (2.18) und (2.21) für die Beziehung zwischen den Knotenwerten $A_{t,p}$ und $U_{t,p}$ unterscheidet sich das FEM-System für die Bewegung im Inertialsystem von dem FEM-System für die Bewegung im beschleunigten Bezugssystem.

In der Gleichung (2.21) für $A_{t,p}$ tritt die höchste zeitliche Ableitung $\ddot{U}_{t,p}$ von $U_{t,p}$ nur als Summand auf. Damit ändert sich nicht der Index der aus dem FEM-System resultierenden gewöhnlichen Differentialgleichung für die Knotenverschiebungen \check{U}_t .

Kapitel 3

Netzwerkmodellierung

Die Beschreibung der Netzwerkmodellierung physikalischer Systeme in diesem Abschnitt orientiert sich an der modifizierten Knotenspannungsanalyse (vgl. [10]).

In groben Zügen wird folgender Zugang gewählt. Ein Netzwerk besteht aus Klemmen mit zugeordneten Klemmengrößen (Potential und Flußgrößen). Das Systemverhalten wird einerseits durch eine Verhaltensrelation zwischen den Klemmengrößen und andererseits durch eine Verbindungsstruktur zwischen Teilsystemen des Systems beschrieben. Die Teilsysteme können modelliert werden, indem Klemmen zu Mehrpolen zusammengefaßt werden. Die Verbindung der Teilsysteme wird realisiert, indem jeweils mehrere Klemmen an einen gemeinsamen Knoten angeschlossen werden.

Dieser Zugang erscheint günstig, da die modifizierte Knotenspannungsanalyse bei den meisten Netzwerkanalyseprogrammen zum Einsatz kommt. Auch das Programm SABER, mit dem das im Abschnitt 3.3 beschriebene Beispiel berechnet worden ist, arbeitet auf der Grundlage dieser Berechnungsmethode.

Nach einer Einführung in grundlegende Begriffe und einige Fakten der Netzwerkmodellierung wird beschrieben, wie FEM-Systeme als Mehrpole von Netzwerken modelliert werden können.

3.1 Grundlagen der Netzwerkmodellierung

Netzwerke eignen sich für die Beschreibung von Systemen, die aus Teilsystemen bestehen. Oft ist die Aufgabe zu lösen, bei bekannten physikalischen Eigenschaften der Teilsysteme und bekannter Verbindungsstruktur der Teilsysteme zum Gesamtsystem das physikalische Verhalten des Gesamtsystems zu ermitteln. Die Verbindung der Teilsysteme geschieht im wesentlichen durch zwei Klassen von Größen, Potentialgrößen und Flußgrößen. Physikalisch ergeben sich aus der Verbindungsstruktur für diese Größen Bilanz- und Potentialgleichungen.

Zur Beschreibung eines Netzwerkes \mathcal{N} kann man von einer Menge \mathcal{P} von *Klemmen* ausgehen. Jeder Klemme $p \in \mathcal{P}$ wird ein reeller Vektorraum \mathcal{U}_p der *Potentialwerte* und ein reeller Vektorraum \mathcal{I}_p der *Flußwerte* zugeordnet. Soll mit einer Klemme p zum Beispiel ein Anschluß eines elektronischen Bauelements modelliert werden, so ist $\mathcal{U}_p = \mathbb{R}V$ die Menge aller Spannungswerte und $\mathcal{I}_p = \mathbb{R}A$ die Menge aller Stromwerte. Steht eine Klemme p für einen Knoten eines FEM-Systems, so ist $\mathcal{U}_p = \mathbb{R}^3m$ der Raum aller Verschiebungsvektoren und $\mathcal{I}_p = \mathbb{R}^3N$ der Raum aller Kraftvektoren. Soll das Zeitverhalten eines Netzwerkes modelliert werden, werden für \mathcal{U} und \mathcal{I}

passende Vektorräume von Zeitfunktionen gewählt.

Eine *Potentialbelegung* u des Netzwerkes \mathcal{N} ordnet jeder Klemme $p \in \mathcal{P}$ einen Potentialwert $u_p \in \mathcal{U}_p$ (auch als Klemmenpotential bezeichnet) zu, analog ordnet eine Flußbelegung i von \mathcal{N} jeder Klemme $p \in \mathcal{P}$ ein Flußwert $i_p \in \mathcal{I}_p$ zu.

Ein Paar (u, i) eines Potentialsignals u und eines Flußsignals i von \mathcal{N} heißt *Signal* von \mathcal{N} .

Alle Signale des Netzwerkes werden zur *Grundsignalmenge* \mathfrak{S} des Netzwerkes zusammengefaßt.

Die Verbindungsstruktur eines Netzwerkes wird durch eine Knotenmenge \mathcal{K} und einer Inzidenzabbildung $\mathcal{A} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{K}$ beschrieben. Gilt für eine Klemme $p \in \mathcal{P}$ und einen Knoten n die Gleichung $n = \mathcal{A}(p)$, so ist p an n *angeschlossen*.

Werden zwei Klemmen $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ durch \mathcal{A} auf den selben Knoten $\mathcal{A}(p_1) = \mathcal{A}(p_2) \in \mathcal{K}$ abgebildet, so sind diese Klemmen miteinander *verbunden*. Es wird vorausgesetzt, daß die Räume \mathcal{U}_p der Potentialwerte miteinander verbundener Klemmen einander gleich sind. Unter dieser Voraussetzung ist es möglich, jedem Knoten $n \in \mathcal{K}$ einen Raum \mathcal{U}_n zuzuordnen, so daß für alle an diesen Knoten angeschlossenen Klemmen p die Potentialräume \mathcal{U}_p gleich \mathcal{U}_n sind.

Weiterhin wird vorausgesetzt, daß die Räume \mathcal{I}_p der Flußwerte miteinander verbundener Klemmen p einander gleich sind.

Die physikalischen Konsequenzen, die sich aus der Verbindung von Klemmen ergeben, werden durch die folgenden Begriffe beschrieben.

Eine Potentialbelegung u heißt *kirchhoffsch*, wenn für miteinander verbundene Klemmen p_1, p_2 die zugehörigen Potentialgrößen u_{p_1}, u_{p_2} gleich sind.

Genau in diesem Fall findet man eine *Knotenbelegung* $\phi_n \in \mathcal{U}_n$ ($n \in \mathcal{K}$), mit der die Gleichung $u_p = \phi_{\mathcal{A}(p)}$ für alle Klemmen p gilt.

Eine Flußgrößenbelegung i heißt *kirchhoffsch*, wenn sich für jeden Knoten $n \in \mathcal{K}$ die Summe der Flußgrößen i_p aller an n angeschlossenen Klemmen p aufhebt, also für jeden Knoten $n \in \mathcal{K}$ die Bilanzgleichung

$$\sum_{p \in \mathcal{P} \text{ mit } \mathcal{A}(p)=n} i_p = 0$$

erfüllt ist.

Ein Signal $(u, i) \in \mathfrak{S}$, mit kirchhoffscher Potentialbelegung u und kirchhoffscher Flußgrößenbelegung i heißt *kirchhoffsches Signal*.

Der *kirchhoffsche Teil* \mathcal{H} von \mathfrak{S} ist die Menge aller kirchhoffschen Signale aus \mathfrak{S} .

Zur Beschreibung der physikalischen Eigenschaften von Teilsystemen eines als Netzwerk modellierten Gesamtsystems (ohne Berücksichtigung der Verbindungsstruktur), dient eine Teilmenge $\mathcal{V} \subset \mathfrak{S}$ der Grundsignalmenge des Netzwerkes. Diese Menge \mathcal{V} soll als *Verhaltensrelation* des Netzwerkes bezeichnet werden.

Als *Lösungen* eines Netzwerkes \mathcal{N} werden diejenigen Signale aus der Grundsignalmenge \mathfrak{S} von \mathcal{N} bezeichnet, die einerseits kirchhoffsch sind und andererseits in der Verhaltensrelation \mathcal{V} von \mathcal{N} enthalten sind.

Ein einfaches Beispiel veranschaulicht die bisher eingeführten Begriffe. Gegeben sei ein Stromkreis aus einer Spannungsquelle mit Quellspannung U_q und einem Widerstand mit Nennwert R (siehe Bild 3.1). Das Netzwerkmodell \mathcal{N} dieses Stromkreises hat die Klemmenmenge $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4\}$, die Knotenmenge $\mathcal{K} = \{a, b\}$ und die Inzidenzabbildung $\mathcal{A} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{K}$ mit $\mathcal{A}(1) = \mathcal{A}(3) = a$, $\mathcal{A}(2) = \mathcal{A}(4) = b$. Die Räume der Fluß- und Potentialwerte $\mathcal{U}_k, \mathcal{I}_k$ ($k = 1, \dots, 4$) seien alle gleich der Menge der

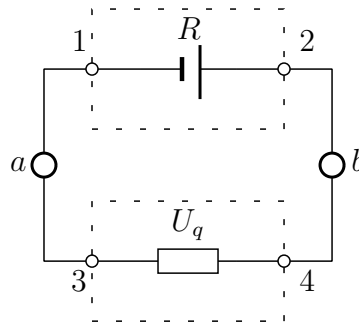


Abbildung 3.1: Einfaches Beispiel eines Netzwerkes.

reellen Zahlen \mathbb{R} . Damit ergibt sich $\mathfrak{S} = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ als Grundsignalmenge. In der Verhaltensrelation

$$\mathcal{V} = \{(u, i) \in \mathfrak{S} \mid \begin{array}{ll} (u_2 - u_1) = U_q; & i_1 + i_2 = 0; \\ (u_4 - u_3) = Ri_4; & i_3 + i_4 = 0 \end{array} \} \quad (3.1)$$

werden die Eigenschaften der zwei Bauelemente Spannungsquelle und Widerstand beschrieben. Ein Signal $(u, i) \in \mathfrak{S}$ dieses Netzwerkes ist kirchhoffsch, falls für die Klemmenpotentiale die Gleichungen $u_1 = u_3$ und $u_2 = u_4$ gelten. In diesem Fall ist die Definition einer Knotenbelegung $\phi_a, \phi_b \in \mathbb{R}$ mit $\phi_a = u_1 = u_3, \phi_b = u_2 = u_4$ möglich.

Lösungen des Netzwerkes sind alle Signale $(u, i) \in \mathfrak{S}$, die die Gleichungen

$$\begin{aligned} i_4 &= \frac{U_q}{R}; \quad i_1 = -i_2; \quad i_3 = -i_1 = i_2; \quad i_4 = -i_2; \\ \phi_b - \phi_a &= U_q; \quad u_3 = u_1 = \phi_a; \quad u_4 = u_2 = \phi_b; \end{aligned}$$

erfüllen, wobei $\phi_a \in \mathbb{R}$ beliebig wählbar ist.

Die Unterteilung eines durch ein Netzwerk \mathcal{N} modellierten Systems in Teilsysteme wird durch Mehrpole $1, \dots, N_M$ beschrieben. Jedem Mehrpol ist eine Klemmenmenge \mathcal{P}_m ($m = 1, \dots, N_M$) zugeordnet. Das System der Mengen \mathcal{P}_m bildet eine Klasseneinteilung der Klemmenmenge \mathcal{P} von \mathcal{N} .

Indem man die Potential- und Flußsignale u, i eines Netzwerkes \mathcal{N} auf die Klemmenmenge \mathcal{P}_m eines Mehrpoles einschränkt, kann man diesem Mehrpol auf natürliche Weise eine Signalmenge \mathfrak{S}_m und eine Verhaltensrelation \mathcal{V}_m zuordnen.

Das Netzwerk aus dem obigen Beispiel unterteilt man sinnvollerweise in einen Mehrpol „Spannungsquelle“ mit Klemmenmenge $\mathcal{P}_1 = \{1, 2\}$ und einen Mehrpol „Widerstand“ mit Klemmenmenge $\mathcal{P}_2 = \{3, 4\}$. Die zugehörigen Verhaltensrelationen sind dann

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \{((u_1, u_2), (i_1, i_2)) \in \mathfrak{S}_1 \mid u_2 - u_1 = U_q; i_1 + i_2 = 0\}, \\ \mathcal{V}_2 &= \{((u_3, u_4), (i_3, i_4)) \in \mathfrak{S}_2 \mid u_4 - u_3 = Ri_4; i_3 + i_4 = 0\}. \end{aligned}$$

Hat man zu jedem Mehrpol $m = 1, \dots, N_M$ ein Signal $(u^m, i^m) \in \mathfrak{S}_m$ gegeben, so kann man aus diesen Signalen in natürlicher Weise wieder ein Signal aus \mathfrak{S} zusammensetzen.

Sind alle Signale $(u, i) \in \mathfrak{S}$, die man aus den Signalen der Verhaltensrelationen \mathcal{V}_m der Mehrpole $m = 1, \dots, N_M$ zusammensetzen kann, wieder in der Verhaltensrelation \mathcal{V} des Netzwerkes \mathcal{N} enthalten, so sind alle Mehrpole voneinander *entkoppelt*.

Die Mehrpole im obigen Beispiel sind voneinander entkoppelt. Wählt man jedoch zum Beispiel $\mathcal{P}_1 := \{1, 3\}$ und $\mathcal{P}_2 := \{2, 4\}$, so sind diese Mehrpole nicht voneinander entkoppelt. In diesem Falle ergibt sich $\mathcal{V}_1 = \mathcal{S}_1$ und $\mathcal{V}_2 = \mathcal{S}_2$, womit sich zum Beispiel auch Signale $(u, i) \in \mathcal{S}$ mit $u_2 - u_1 \neq U_q$ zusammensetzen lassen.

Im folgenden wird davon ausgegangen, daß ein Netzwerk nur in voneinander entkoppelte Mehrpole zerlegt wird.

An Mehrpole mit elektrischen Klemmen werden oft noch zwei zusätzliche Forderungen gestellt. Erstens wird gefordert, daß bei Signalen aus der Verhaltensrelation eines Mehrpols die Summe der Flußgrößen aller elektrischen Klemmen gleich Null ist (das entspricht dem Schnittgesetz aus der Elektrotechnik). Zweitens wird von den beschreibenden Gleichungen des Mehrpols verlangt, daß die Klemmenströme nur von Klemmenpotentialdifferenzen der elektrischen Klemmen abhängen. Oder exakt formuliert, wird von der Verhaltensrelation \mathcal{V}_m des Mehrpols gefordert, daß man für jedes Signal $(u, i) \in \mathcal{V}$ und für einen beliebigen Potentialwert $\Delta U \in \mathcal{U}_p$ wiederum ein Signal aus \mathcal{V} erhält, indem man zu den Klemmenpotentialen u_p aller elektrischen Klemmen p den Potentialwert ΔU hinzuaddiert.

Auch bei einem kirchhoffschen Potentialsignal eines Netzwerkes kann man die Potentialwerte aller elektrischen Klemmen um einen Potentialwert ΔU abändern und erhält wiederum ein kirchhoffsches Potentialsignal.

Damit kann die Lösung eines Netzwerkes mit elektrischen Klemmen nicht eindeutig sein. Das ist ungünstig für die numerische Berechnung der Lösung.

Deshalb wird ein ausgezeichneter Mehrpol mit einer elektrischen Klemme eingeführt, die (*elektrische*) *Erde* mit der *Erdklemme* 0 und der durch die Gleichungen $u_0 = 0, i_0 = 0$ beschriebenen Verhaltensrelation.

Aus mehreren vorgegebenen Mehrpolen \mathcal{P}_m ($m = 1, \dots, N_M$) mit Verhaltensrelationen \mathcal{V}_m kann man ein Netzwerk \mathcal{N} *zusammensetzen*. Die Klemmenmenge \mathcal{P} von \mathcal{N} ist die disjunkte Vereinigung¹ der Klemmenmengen der Mehrpole

$$\mathcal{P} := \sum_{m=1}^{N_M} \mathcal{P}_m.$$

Zur Konstruktion von \mathcal{N} gibt man sich die Knotenmenge \mathcal{K} und die Inzidenzabbildung $\mathcal{A} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{K}$ von \mathcal{N} vor. Die Inzidenzabbildung muß der Bedingung genügen, daß die Potentialräume miteinander verbundener Klemmen gleich sind. Analoges gilt für die Flußräume. Die Verhaltensrelation \mathcal{V} des Netzwerkes wird aus den Verhaltensrelationen der Mehrpole zusammengesetzt.

3.2 Netzwerkmodelle mechanischer Systeme

Im folgenden wird nur auf Wechselwirkungen zwischen elastischen Körpern eingegangen, die auf Oberflächenspannungen beruhen, d. h. es wird vorausgesetzt, daß die Volumenkraftdichte B_t gleich Null ist. Eine feste Verbindung zweier elastischer Körper $\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}$ an einer Fläche $A := \partial\mathcal{B} \cap \partial\bar{\mathcal{B}}$ wird kinematisch durch die Restriktion

$$\Phi_t^\partial(X) = \bar{\Phi}_t^\partial(x) \quad \forall X \in A$$

¹Bei der disjunkten Vereinigung zweier Mengen A, B werden diese zuerst disjunkt gemacht, zum Beispiel durch $A' := A \times \{0\}, B' := B \times \{1\}$, und dann miteinander vereinigt $A + B = A' \cup B'$ (siehe [13]).

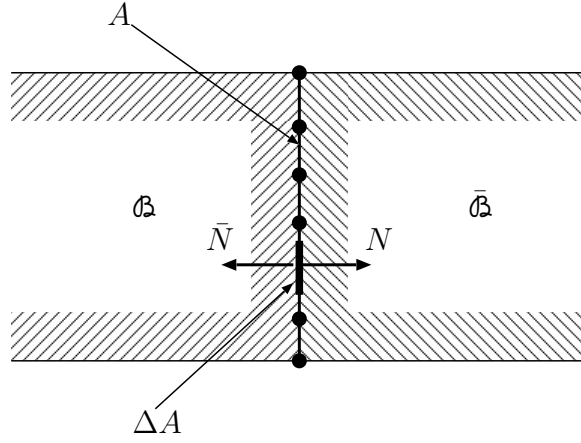


Abbildung 3.2: Verbindung zweier Körper an einer Fläche $A = \partial B \cap \partial \bar{B}$. Die Punkte sollen die gemeinsamen Gitterpunkte der Elementzerlegungen von B und \bar{B} auf der Randfläche A andeuten.

für Bewegungen Φ_t und $\bar{\Phi}_t$ von B bzw. \bar{B} modelliert. Die Linearisierung dieser Gleichung in $\Phi_t = \mathbf{Id}_B$ und $\bar{\Phi}_t = \mathbf{Id}_{\bar{B}}$ liefert die Restriktion

$$U_t^\partial(X) = \bar{U}_t^\partial(X) \quad \forall X \in A \quad (3.2)$$

für Verschiebungsfelder auf B bzw. \bar{B} .

Für beide Körper seien Zerlegungen in die im Abschnitt 2.2 beschriebenen finiten Elemente gegeben. Die auf der Verbindungsfläche liegenden Gitterpunkte der beiden Zerlegungen werden als *äußere* Gitterpunkte von B bzw. \bar{B} bezeichnet. Es wird vorausgesetzt, daß die FEM-Zerlegungen von B und \bar{B} *zusammenpassen*. Das heißt, daß die Randfläche A durch die zwei Zerlegungen von B und \bar{B} in die gleichen Teilflächen eingeteilt wird, und somit die Körper B und \bar{B} auf A die gleichen Gitterpunkte haben.

Damit ist die Randbedingung $U_t^\partial(X) = \bar{U}_t^\partial(X)$ im Rahmen des FEM-Modells genau dann erfüllt, wenn für alle auf A liegenden Gitterpunkte $X_p \in \partial B \cap A$ und $\bar{X}_{\bar{p}} \in \partial \bar{B} \cap A$ die Gleichung $U_p = \bar{U}_{\bar{p}}$ gilt². Das sieht man sofort ein, wenn man beachtet, daß die Einschränkung der Ansatzfunktionen U und \bar{U} auf die gemeinsame Randfläche A schon durch die Knotenwerte U_p für die äußeren Gitterpunkte p und die Lagen X_p bzw. $\bar{X}_{\bar{p}}$ der äußeren Gitterpunkte eindeutig festgelegt ist.

Eine weitere Gleichung zur Modellierung von festen Verbindungen zwischen elastischen Körpern resultiert aus dem Schnittgesetz der Mechanik für die Oberflächenspannungen Θ_t^∂ und $\bar{\Theta}_t^\partial$ auf der gemeinsamen Randfläche A . Für jede stückweise glatt berandete Teilfläche $\Delta A \subset A$ sollen sich die durch Θ_t^∂ und $\bar{\Theta}_t^\partial$ verursachten Oberflächenkräfte aufheben

$$\begin{aligned} \int_{\Delta A} \Theta^\partial(X) \, dA + \int_{\Delta A} \bar{\Theta}^\partial(X) \, dA &= 0 \\ \int_{\Delta A} (\Theta^\partial(X) + \bar{\Theta}^\partial(X)) \, dA &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

²Natürlich gilt $\partial B \cap A = \partial \bar{B} \cap A$, dennoch wurde diese Bezeichnung gewählt um anzudeuten, daß $p \mapsto X_p$ den Indizes $p = 1, \dots, N_G$ die Gitterpunkte von B zuordnet, während $\bar{p} \mapsto \bar{X}_{\bar{p}}$ den Indizes $\bar{p} = 1, \dots, \bar{N}_G$ die Gitterpunkte von \bar{B} zuordnet.

Damit die Gleichung (3.3) für alle glatt berandeten Teilflächen ΔA gilt, müssen sich in jedem Punkt der gemeinsamen Randfläche die Oberflächenspannungen aufheben

$$\Theta_t^\partial(X) + \bar{\Theta}_t^\partial(X) = 0 \quad \forall (X \in A). \quad (3.4)$$

Die Knotenkräfte f_p und $\bar{f}_{\bar{p}}$ für einen Gitterpunkt $X_p = \bar{X}_{\bar{p}} \in A$ ergeben sich zu

$$\begin{aligned} f_p &= \int_{\partial\Omega} \Theta^\partial(X) \eta_p(X) \, dX && \text{bzw.} \\ \bar{f}_{\bar{p}} &= \int_{\partial\bar{\Omega}} \bar{\Theta}_t^\partial(X) \bar{\eta}_{\bar{p}}(X) \, dX. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Einschränkungen der Knotenbasisfunktionen η_p und $\bar{\eta}_{\bar{p}}$ für gleiche Gitterpunkte $X_p = \bar{X}_{\bar{p}}$ auf die gemeinsame Randfläche A sind gleich (da die FEM-Zerlegungen der Körper zusammenpassen). Aus (3.5) und (3.4) folgt somit

$$\begin{aligned} f_p &= \int_{\partial\Omega} \Theta^\partial(X) \eta_p(X) \, dX = \int_{\partial\bar{\Omega}} (-\bar{\Theta}_t^\partial(X)) \eta_p(X) \, dX = -\bar{f}_{\bar{p}} \\ f_p &= -\bar{f}_{\bar{p}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

An dem im Bild 3.3 skizzierten Beispiel von drei miteinander fest verbundenen

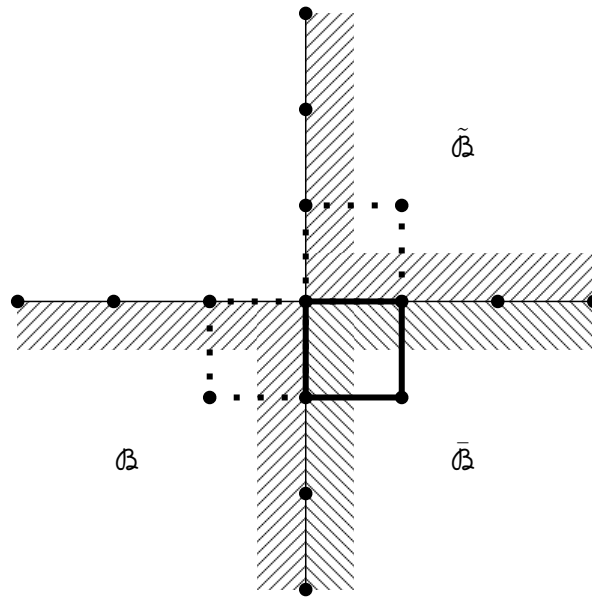


Abbildung 3.3: Im Text diskutiertes Beispiel eines Gitterpunktes, der gemeinsamer Randpunkt dreier fest miteinander verbundener Körper ist. Es sind die Elemente angedeutet, auf deren Rand dieser Gitterpunkt liegt.

elastischen Körpern soll beschrieben werden, wie Gleichung (3.6) auf Gitterpunkte X_p übertragen werden kann, die zu Elementzerlegungen von mehr als zwei elastischen Körpern gehören. Mit naheliegenden Bezeichnungen für die Größen der einzelnen elastischen Körper und $\bar{X}_{\bar{p}} = \bar{X}_{\bar{p}} = X_p$ gilt

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_t^\partial(X) &= -\Theta_t^\partial(X) && \text{für } X \in \bar{A} \text{ bzw.} \\ \tilde{\Theta}_t^\partial(X) &= -\Theta_t^\partial(X) && \text{für } X \in \tilde{A}. \end{aligned}$$

Aus der Übereinstimmung der Zerlegungen auf den Verbindungsflächen folgt wieder

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_{\bar{p}}(X) &= \eta_p(X) & (\forall X \in \bar{A}) \\ \tilde{\eta}_{\tilde{p}}(X) &= \eta_p(X) & (\forall X \in \tilde{A}).\end{aligned}$$

Für die Knotenkraft f_p folgt daraus die Gleichung

$$\begin{aligned}f_p &= \int_{\partial\mathfrak{B}} \Theta_t(X) \eta_p(X) \, dA \\ &= \int_{\partial\bar{\mathfrak{B}}} -\bar{\Theta}_t(X) \bar{\eta}_{\bar{p}}(X) \, dA + \int_{\partial\tilde{\mathfrak{B}}} -\tilde{\Theta}_t(X) \tilde{\eta}_{\tilde{p}}(X) \, dA \\ &= -\bar{f}_{\bar{p}} - \tilde{f}_{\tilde{p}}.\end{aligned}$$

Haben allgemein n elastische Körper $e = 1, \dots, n$ einen gemeinsamen Gitterpunkt $X_{p^1}^1 = \dots = X_{p^n}^n$, so heben sich in der Summe $\sum_{e=1}^n f_{p^e}^e$ jeweils die Integralanteile der gemeinsamen Randflächen auf, wenn die Oberflächenspannungen der Körper das Schnittgesetz erfüllen. Damit folgt

$$\sum_{e=1}^n f_{p^e}^e = 0. \quad (3.7)$$

Die Gleichungen (3.2) und (3.7) entsprechen den definierenden Gleichungen für kirchhoffsche Signale. Das motiviert die folgende Netzwerkmodellierung mechanischer Systeme.

Gegeben sei ein mechanisches System elastischer Körper (und eventuell fester Einspannungen und Oberflächenspannungsfelder). Die Körper seien zueinander passend in finite Elemente zerlegt.

Aus dem FEM-Modell soll ein Netzwerkmodell konstruiert werden. Dazu wird gezeigt, wie jedem Körper \mathfrak{B} des mechanischen Systems ein Mehrpol zugeordnet werden kann.

Die Klemmenmenge \mathcal{P}_m des Mehrpoles besteht aus (den Indizes von) allen äußeren Gitterpunkten (also den Gitterpunkten auf denjenigen Randflächen von \mathfrak{B} , an denen die Randflächen der mit \mathfrak{B} fest verbundenen anderen Körper des Systems anschließen oder auf denen sonstige Randbedingungen (z. B. Einspannung oder Spannungsfeld) festgelegt sind). Die Potential- und Flußgrößenräume aller Klemmen $p \in \mathcal{P}$ sind

$$\mathcal{U}_p := \mathcal{I}_p := C^2(T, \mathbb{R}^3),$$

wobei T das Beobachtungszeitintervall sei (z. B. $T = \mathbb{R}$).

Das Verhalten des FEM-Modells wird laut Gleichung (2.17) durch ein FEM-System

$$M\ddot{A}_t + K\dot{U}_t = \check{f}_t$$

beschrieben, wobei sich die Knotenbeschleunigungen \ddot{A}_t jenachdem, ob bzgl. eines Inertialsystems oder eines beschleunigten Bezugssystems koordinatisiert worden ist, aus Gleichung (2.4) bzw. (2.5) in Abhängigkeit der Verschiebung U_t ergibt.

Die Verhaltensbeschreibung des FEM-Systems wird wie folgt auf den Mehrpol

übertragen.

$$\mathcal{V}_m := \left\{ (u, i) \in \mathfrak{S}_m \left| \begin{array}{l} M\check{A}_t + K\check{U}_t = \check{f}_t \\ \text{mit dem Knotenkraftvektor} \\ f_p := -i_p \text{ für } p \in \mathcal{P}_m \text{ und } f_p := 0 \text{ sonst} \\ \text{und einer Knotenverschiebung } \check{U} \in C^2(T, \mathbb{R}^3), \\ \text{die der Gleichung } u_p = U_p \text{ (} \forall p \in \mathcal{P}_m \text{) genügt} \end{array} \right. \right\}. \quad (3.8)$$

Die Potentialgrößen des Mehrpoles sind also die Verschiebungen der äußeren Knoten und die Flußgrößen sind bis auf das Vorzeichen die Knotenkräfte der äußeren Gitterpunkte. Die Vorzeichenregelung für die Flußgrößen wurde vom Netzwerkanalyseprogramm SABER übernommen.

Randflächen A von elastischen Körpern des Systems, an denen das Verschiebungsfeld bzw. das Oberflächenspannungsfeld als Randbedingung vorgegeben wird, können analog als Mehrpole modelliert werden.

Die Klemmen \mathcal{P}_m eines solchen Mehrpols sind die Indizes der auf der Randfläche liegenden Gitterpunkte. Die Verhaltensrelation wird bei vorgegeschriebenem Verschiebungsfeld $U_t^\partial|A$ durch die Gleichung

$$u_p = U^\partial(X_p) \quad (p \in \mathcal{P}_m)$$

für die Klemmenpotentiale und bei vorgeschriebenem Oberflächenspannungsfeld $\Theta_t^\partial|A$ durch die Gleichung

$$i_p = \int_A \Theta_t^\partial(X) \eta_p(X) \, dA \quad (\forall p \in \mathcal{P})$$

beschrieben. Die jeweils anderen Klemmengrößen sind frei wählbar.

Alle Teile des mechanischen Systems werden auf diese Weise als Mehrpole modelliert. Alle Mehrpole werden dann zu einem Netzwerk \mathcal{N} zusammengesetzt.

Dazu sind lediglich noch eine Knotenmenge \mathcal{K} und eine Inzidenzabbildung \mathcal{A} für das Netzwerk anzugeben. Alle anderen Bestimmungsstücke des Netzwerkes sind schon durch die Mehrpole festgelegt (Die Klemmenmenge \mathcal{P} von \mathcal{N} ist die disjunkte Vereinigung der Klemmenmengen \mathcal{P}_m $m = 1, \dots, N_M$ der Mehrpole, die Grundsignalmenge \mathfrak{S} und die Verhaltensrelation \mathcal{V} von \mathcal{N} ergeben sich durch Zusammensetzen der Verhaltensrelationen \mathcal{V}_m bzw. Grundsignalmengen \mathfrak{S}_m $m = 1, \dots, N_M$ der Mehrpole.)

Zur Definition einer Knotenmenge \mathcal{K} für \mathcal{N} kann man eine Klasseneinteilung der Klemmenmenge \mathcal{P} nutzen. Man faßt alle Klemmen $p, \bar{p}, \dots, \tilde{p}$ zu einer Klasse zusammen, deren zugehörige Gitterpunkte $X_p, \bar{X}_{\bar{p}}, \dots, \tilde{X}_{\tilde{p}}$ am gleichen Ort $X_p = \bar{X}_{\bar{p}} = \dots = \tilde{X}_{\tilde{p}}$ liegen. Die Klassen, d. h. die Mengen $n := \{p, \bar{p}, \dots, \tilde{p}\}$, seien die Knoten von \mathcal{N} , womit die Klasseneinteilung selber (also die Menge aller dieser Klassen) die Knotenmenge \mathcal{K} von \mathcal{N} ist. Die natürliche Projektion dieser Klasseneinteilung kann dann als Inzidenzabbildung $\mathcal{A} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{K}$ genutzt werden (d. h. $\mathcal{A}(p) = n \Leftrightarrow p \in n$).

3.3 Beispiel für die Generierung eines Netzwerkes aus einem FEM-System

Bei einem am Fraunhofer Institut für Integrierte Schaltungen entwickelten Programm zur Übertragung von ANSYS-FEM-Modellen in MAST-Netzwerkmodelle wurde von mir im Rahmen einer Tätigkeit als studentische Hilfskraft die Generierung von Bewegungsgleichungen im beschleunigten Bezugssystem ergänzt.

Zum Testen des Programms diente unter anderem das Modell eines einseitig fest eingespannten Balkens im beschleunigten Bezugssystem. Dieses Beispiel hat den Vorteil, daß die linearisierten Modellgleichungen näherungsweise analytisch berechenbar sind. So kann man die Simulationsergebnisse mit den theoretisch zu erwartenden Werten vergleichen.

Gegeben sei ein aus polykristallinem Silizium bestehender Balken mit den Daten

- Länge $l = 1\text{mm}$,
- Breite, Höhe $b = h = 100\mu\text{m}$
- Dichte $\rho_{\text{ref}} = 2326 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$,
- Elastizitätsmodul $E = 130.2\text{GPa}$,
- Schubmodul $G = 79.62\text{GPa}$.

Eine genauere Beschreibung der mechanischen Materialeigenschaften von Silizium ist zum Beispiel in [29] zu finden.

Längen werden im folgenden auf $1\mu\text{m}$, Kräfte auf 1N und die Zeit auf 1s bezogen. Damit ergibt sich die Bezugsgröße für die Masse zu $\frac{1\text{N}(1\text{s})^2}{1\mu\text{m}} = 1\text{kT}$ (eine Kilotonne).

Der Balken wird geometrisch durch den Körper

$$\mathfrak{B} := \left(-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right) \times \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) \times (0, l) \subset \mathbb{R}^3$$

mit $b = 100$, $h = 100$, $l = 1000$ und eine Bewegung

$$\Phi_t : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

modelliert.

Zur Berechnung der Balkendeformation wird die Bernoulli-Hypothese herangezogen, bei der angenommen wird, daß die Einschränkung von Φ_t auf Querschnittsflächen A_q des Balkens Isometrien sind. Das heißt, Φ_t läßt sich mit einer durch die Koordinate X_3 parametrisierten Drehmatrix \tilde{Q}_{X_3} und einem ebenfalls durch X_3 parametrisierten Ortsvektor \tilde{r}_{X_3} in der Form

$$\Phi_t(X) = \tilde{r}_{X_3} + \tilde{Q}_{X_3} \cdot (X_1, X_2, 0)$$

darstellen. Die Linearisierung dieser Gleichung in $\Phi_t = \mathbf{Id}$, $r_{X_3} = (0, 0, X_3)$ und $Q_{X_3} = \mathbf{Id}$ führt auf

$$U(X) = \delta \tilde{r}_{X_3} + \left(\delta \tilde{Q}_{X_3}\right) \cdot (X_1, X_2, 0).$$

Als Variation von Drehmatrizen ist $\delta\tilde{Q}_{X_3}$ antisymmetrisch und läßt sich mit einem Vektor $\phi(X_3)$ als Vektorprodukt

$$\delta Q_{X_3} = [\phi(X_3), \bullet]$$

schreiben. Der Vektor $\phi(X_3)$ steht für den linearisierten Drehwinkel, um den die Balkenachse an der Stelle X_3 gegenüber der undeformierten Bezugslage verdreht ist. Die Verrückung $\delta\tilde{r}_{X_3}$ der Balkenachse an der Stelle X_3 soll im folgenden mit $s(X_3)$ abgekürzt werden. Mit diesen Größen ergibt sich der linearisierte Deformationsgradient zu

$$DU(X) = \begin{pmatrix} 0 & -\phi_3 & s'_1 - \phi'_3 X_2 \\ \phi_3 & 0 & s'_2 + \phi'_3 X_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & s'_3 - \phi'_2 X_1 + \phi'_1 X_2 \end{pmatrix}.$$

Hierbei steht der Strich bei $s'(X_3)$ und $\phi'(X_3)$ für die Ableitung von s bzw. ϕ nach X_3 .

Natürlich ist die Verhaltensrelation des Balkens genauso wie die von elastischen Körpern bewegungsinvariant. (Eine Überlagerung der Deformation des Balkens durch eine Starrkörpermodifikation ändert die Deformationsenergie des Balkens nicht.) Also sind auch beim Balken der cauchy'sche Deformationstensor und der daraus abgeleitete Verzerrungstensor ε geeignete Beschreibungsgrößen der Deformation des Balkens.

Jedoch kann unter der Bernoulli-Hypothese nicht mehr von einem isotropen Materialverhalten ausgegangen werden. Bei isotropen Materialverhalten müßte der Balken in Richtung der Balkenachse die gleichen Deformationseigenschaften aufweisen wie entlang des Querschnittes, also starr sein. Auch die Bewegungsgleichung kann nicht in der Form (1.49) genutzt werden, denn \hat{P} ist nicht definiert. Es muß also direkt vom Kräftegleichgewicht und Momentengleichgewicht

$$\int_{\mathcal{U}} \rho_{\text{ref}} A_t \, dV = \int_{\partial\mathcal{U}} \Theta_t(X, N) \, dA \quad (3.9)$$

$$\int_{\mathcal{U}} [X, \rho_{\text{ref}} A_t] \, dV = \int_{\partial\mathcal{U}} [X, \Theta_t(X, N)] \, dA \quad (3.10)$$

ausgegangen werden, wobei für \mathcal{U} nur Balkenabschnitte in Frage kommen, die durch parallel zur X_1 - X_2 -Ebene liegende Flächen begrenzt sind. Im Rahmen der Linearisierung wird von einer linearen Abhängigkeit des Spannungsvektorfeldes $\Theta(X, N)$ vom Verzerrungstensor

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2}(DU + DU^T) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(s'_1 - \phi'_3 X_2 - \phi_2) \\ & 0 & \frac{1}{2}(s'_2 + \phi'_3 X_1 + \phi_1) \\ \text{sym.} & & s'_3 - \phi'_2 X_1 + \phi'_1 X_2. \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ausgegangen. Aus Symmetrieüberlegungen (Invarianz des Materialgesetzes bzgl. Drehungen des Balkens um die Balkenachse) folgt, daß das Materialgesetz die Form

$$\Theta(X, N) = \begin{pmatrix} 2G & 0 & 0 \\ 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \varepsilon N \quad (3.11)$$

mit Materialkonstanten G und E haben muß (insofern eine maximale Symmetrie des Materialgesetzes für den **elastischen** Balken aufrecht erhalten werden soll). Rechnet man mit den resultierenden Gleichungen reine Drehung und reine Deformation aus, so erkennt man, daß E und G Elastizitätsmodul und Schubmodul des Materials sind.

Es ist günstig, Kräfte- und Momentengleichgewicht für den in Bild 3.4 eingezeichneten Balkenabschnitt $\mathcal{U} = (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}) \times (-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}) \times (X_3, l)$ aufzustellen. Für

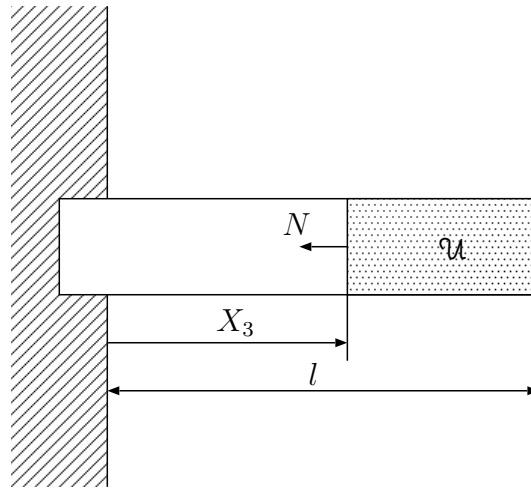


Abbildung 3.4: Der einseitig fest eingespannte Balken, der als Beispiel für die Übertragung von FEM-Modellen in Netzwerkmodelle dient. An dem gepunktet dargestellten Balkenabschnitt \mathcal{U} werden das Kräftegleichgewicht und das Momentengleichgewicht aufgestellt.

diesen Balkenabschnitt ist die Oberflächenspannung Θ höchstens auf der Schnittfläche $A_q = (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}) \times (-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}) \times \{X_3\}$ ungleich Null. Mit (3.11) ergibt sich die rechte Seite vom Kräftegleichgewicht (3.9) zu

$$\begin{aligned} F &:= \int_{X \in A_q} \Theta(X, N) \, dA \\ &= \int_{X \in A_q} - \begin{pmatrix} G(s'_1 - \phi'_3 X_2 - \phi_2) \\ G(s'_2 + \phi'_3 X_1 + \phi_1) \\ E(s'_3 - \phi'_2 X_1 + \phi'_1 X_2) \end{pmatrix} \, dA, \end{aligned}$$

wobei $N = (0, 0, -1)$ die äußere Einheitsnormale an \mathcal{U} in $X \in A_q$ ist. Die rechte Seite von (3.10) ergibt sich zu

$$\begin{aligned} M(X_3) &:= \int_{\tilde{X} \in A_q} [\tilde{X} - (0, 0, X_3), \Theta(\tilde{X}, N)] \, dA \\ &= \int_{\tilde{X} \in A_q} - \begin{pmatrix} E(\phi'_1 \tilde{X}_2^2 - \phi'_2 \tilde{X}_1 \tilde{X}_2) \\ E(\phi'_2 \tilde{X}_2^2 - \phi'_1 \tilde{X}_1 \tilde{X}_2) \\ G\phi'_3(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2) \end{pmatrix} \, dA. \end{aligned}$$

Die Größen F und M heißen Schnittkraft und Schnittmoment.

Da der Flächenschwerpunkt von A_q auf der X_3 -Achse liegt, liefern diejenigen Summanden in den Integranden, deren Abhängigkeit von X sich auf die lineare

Abhängigkeit von X_1 oder X_2 beschränkt, keinen Beitrag zum Integralwert. Außerdem verschwinden auch die Integralanteile mit $X_1 X_2$ als Faktor, da A_q symmetrisch zu den Ebenen $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ ist. Für die Komponenten von F und M bleiben nur die folgenden Terme übrig

$$\begin{aligned}
 F_1 &= -GA_q(s'_1 - \phi_2), \\
 F_2 &= -GA_q(s'_2 - \phi_1), \\
 F_3 &= -EA_q s'_3, \\
 M_1 &= -EI_1 \phi'_1, \\
 M_2 &= -EI_2 \phi'_2, \\
 M_3 &= -GI_3 \phi'_3
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

mit den Flächenträgheitsmomenten

$$\begin{aligned}
 I_1 &:= \int_{A_q} X_2^2 \, dA = \frac{1}{12} b h^3, \\
 I_2 &:= \int_{A_q} X_1^2 \, dA = \frac{1}{12} b^3 h, \\
 I_3 &:= \int_{A_q} (X_1^2 + X_2^2) \, dA = I_1 + I_2.
 \end{aligned}$$

Für zwei verschiedene beschleunigte Bewegungen des Bezugssystems sollen nun die Verschiebungen $s(l)$ der Balkenachse am freien Balkenende ermittelt werden.

Zuerst werden dazu die eben angeführten Differentialgleichungen genutzt, dann wird die Lösung mittels eines FEM-Modells für ANSYS berechnet und schließlich wird die Lösung mit einem automatisch aus dem FEM-Modell generierten Netzwerkmodell (in der Beschreibungssprache MAST) berechnet. Zum Abschluß werden die Ergebnisse miteinander verglichen.

Gleichmäßige translatorische Beschleunigung des Bezugssystems

Das Bezugssystem sei translatorisch in X_1 -Richtung mit $10^4 \frac{m}{s^2}$ beschleunigt. Damit gilt³ $A_{t,1} = (10^{10}, 0, 0)$.

Die linke Seite des Kräftegleichgewichtes (3.9)

$$F(X_3) = \int_{\mathcal{U}} \rho_{\text{ref}} A_t \, dV$$

ist die Kraft, die sich aus der Beschleunigung A_t des Balkenabschnittes \mathcal{U} mit mit Masse $(l - X_3)bh\rho_{\text{ref}}$ ergibt

$$F(X_3) = ((l - X_3)bh\rho_{\text{ref}}A_t, 0, 0).$$

Die linke Seite des Momentengleichgewichtes (3.10)

$$M(X_3) = \int_{\tilde{X}\mathcal{U}} [\tilde{X} - (0, 0, X_3), \rho_{\text{ref}}A_t] \, dV$$

³Man beachte die Normierung auf $1\mu m$.

bzgl. des Schwerpunktes $(0, 0, X_3)$ von A_q ist das Moment, das sich aus der Beschleunigung des Balkenabschnittes \mathcal{U} mit oben angegebener Masse und Massenschwerpunkt $\frac{X_3+l}{2}$ bzgl. $(0, 0, X_3)$ ergibt

$$M(X_3) = \left(0, \frac{1}{2}(l - X_3)^2 bh \rho_{\text{ref}} A_{t,1}, 0 \right).$$

Einsetzen dieser Kraftgrößen in das Differentialgleichungssystem (3.12) mit den Anfangsbedingungen $s(0) = 0$, $\phi(0) = 0$ ergibt

$$\phi_1(X_3) = 0$$

$$\begin{aligned} \phi_2(X_3) &= -\frac{1}{EI_2} \int_0^{X_3} \frac{1}{2}(l - \tilde{X}_3)^2 bh \rho_{\text{ref}} d\tilde{X}_3 = \dots \\ &= \frac{2\rho_{\text{ref}}}{Eb^2} ((l - X_3)^3 - l^3) \end{aligned}$$

$$\phi_3(X_3) = 0$$

$$\begin{aligned} s_1(X_3) &= \int_0^{X_3} \left(\phi_2(\tilde{X}_3) - \frac{1}{Gbh} F_1(\tilde{X}_3) \right) d\tilde{X}_3 = \dots \\ &= -\frac{3\rho_{\text{ref}} A_{t,1} l^4}{2Eb^2} - \frac{\rho_{\text{ref}} A_{t,1} l^2}{2G} \end{aligned}$$

$$s_2(X_3) = 0$$

$$s_3(X_3) = 0$$

Mit den vorgegebenen Werten für $b, h, l, \rho_{\text{ref}}, E, G, A_{t,1}$ erhält man für die Verschiebung der Balkenachse im freien Balkenende

$$s_1(l) = -26,943 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}.$$

Zur FEM-Modellierung des einseitig eingespannten Balkens im translatorisch beschleunigten Bezugssystem wurde sein Körper \mathfrak{B} der Länge nach in vier gleichlange ANSYS-Volumenelemente vom Typ `solid45` unterteilt. Bei der Vernetzung mit dem ANSYS-Kommando `vmesh` wurden den Gitterpunkten am eingespannten Balkenende die Gitterpunktnummern 1, 2, 3, 4 zugewiesen und denjenigen am freien Balkenende die Gitterpunktnummern 5, 9, 13, 17.

Zur Berechnung der Verschiebung des Balkenendes mittels ANSYS wurde die Beschleunigung des Bezugssystems mit dem ANSYS-Kommando `acel,10e9` vorgegeben und an den Gitterpunkten 1, 2, 3, 4 wurden mit dem ANSYS-Kommando `d,all,all` homogene Randbedingungen festgelegt. (Für eine nähere Beschreibung der ANSYS-Kommandos sei auf [22] und die ANSYS-Dokumentation [3] verwiesen.)

Nach einer statischen Analyse des FEM-Modells wurde das in Bild 3.5 gezeigte Verschiebungsbild erzeugt und die folgende Liste der Verschiebungen der Gitterpunkte am freien Balkenende angelegt.

Es ist zu beachten, daß in ANSYS-Programmen und Ausgaben sowie bei SABER-Netzlisten die Koordinaten mit x, y, z statt mit X_1, X_2, X_3 bezeichnet werden.

```
PRINT U      NODAL SOLUTION PER NODE
```

```
***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****
```

```
LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000      LOAD CASE=  0
```

```
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES
```

```

NODE      UX
   5 -0.26133E-01
   9 -0.26133E-01
  13 -0.26133E-01
  17 -0.26133E-01
```

```
MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
```

```

NODE      5
VALUE -0.26133E-01
```

Zur Ausgabe des FEM-Systems wurde der Analysetyp „Substructuring“ genutzt. Jedoch wurden alle Freiheitsgrade des FEM-Modells als Hauptfreiheitsgrade ausgewählt, so daß keine statische Kondensation erfolgte, sondern das gesamte FEM-System ausgegeben wurde. Bei der Erstellung des FEM-Systems dürfen keine Randbedingungen festgelegt werden, sonst fehlen die zu den Gitterpunkten mit eingeschränkten Freiheitsgraden gehörigen Gleichungen. Das FEM-System ist dann für die Generierung von Netzwerkmodellen, die bzgl. beschleunigter Bezugssysteme gültig sein sollen, unbrauchbar.

Mit den zwei Programmen `ans2file` und `file2mast` wurde das FEM-System in ein Netzwerkmodell in der Beschreibungssprache MAST übersetzt. Das Netzwerkmodell wurde `balken` genannt und in der Datei `balken.sin` abgespeichert.

Mittels der folgenden SABER-Netzliste wurde das obige Beispiel des fest eingespannten Balkens im translatorisch beschleunigten Bezugssystem modelliert.

```
<include.sin
```

```
inertial_reference.ir axr:axr wxr:wxr ayr:ayr wyr:wyr azr:azr wzr:wzr \
axri:ax wxri:wx ayri:ay wyri:wy azri:az wzri:wz
```

```
src.srcax out:ax = dc=0 #
src.srcay out:ay = dc=10e9 # ungefaehr 1000-fache Erdbeschleunigung (in um/s^2)
src.srcaz out:az = dc=0 #
src.srcwx out:wx = dc=0 #
src.srcwy out:wy = dc=0 #
src.srcwz out:wz = dc=0 #
```

```
balken.1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 \
x5 y5 z5 x9 y9 z9 x13 y13 z13 x17 y17 z17
```

In SABER-Netzlisten sind noch keine Klemmen mit dreidimensionalen Räumen für Potential- und Flußwerte vorgesehen (obwohl diese in MAST-Netzwerkmodellen schon definiert werden können).

Deshalb mußten jedem äußeren Gitterpunkt des Balkenmodells drei Klemmen mit eindimensionalen Räumen für Potential- und Flußwerte zugeordnet werden.

Die Bezeichnungen der Knoten in der Netzliste setzen sich aus dem Bezeichner für die Raumrichtung x, y, z und der Nummer des an den Knoten angeschlossenen Gitterpunktes des Balkenmehrpols `balken.1` zusammen.

Die Einspannung wird modelliert, indem die Klemmen zu den Gitterpunkten 1, 2, 3, 4 des Balkenmehrpols an den Knoten 0 angeschlossen werden. Der Knoten 0 ist implizit mit der Erdklemme verbunden. Damit wird dort für die Lösungen des Netzwerkes Nullpotential vorgeschrieben. Was einer Null-Verschiebung in den Gitterpunkten 1, 2, 3, 4 des Balkenmehrpols entspricht.

Die eingebundene Datei `include.sin` und das Netzwerkmodell `inertial_reference` wurden von Gunnar Lorenz von der Robert Bosch GmbH im Rahmen des MIMOSYS-Projektes entwickelt (siehe [11]). In der Datei `include.sin` wird ein Einheitensystem für Beschleunigungsgrößen deklariert, und der Mehrpol `inertial_referenz` dient zum Bereitstellen der Größen `axr, wxr, ayr, wyr, azr, wzr`, die die Bewegung des Bezugssystems beschreiben.

Das Zahlentripel (`axr, ayr, azr`) steht für den Koordinatenvektor \vec{r}_t der translatorische Beschleunigung des Bezugssystems (r_t, Q_t) gegenüber dem Inertialsystem $(0, \mathbf{Id})$, und (`wxr, wyr, wzr`) steht für den Koordinatenvektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ von (r_t, Q_t) gegenüber $(0, \mathbf{Id})$. Alle Vektoren sind bzgl. (r_t, Q_t) koordinatisiert (vgl. Abschnitt 1.2).

Mit den Signalen der Signalquellen `src.srcax` bis `src.srcwz` kann die Bewegung des Bezugssystems vorgegeben werden. Für das Beispiel des translatorisch beschleunigten Bezugssystems geschieht das durch den Eintrag

```
src.srcay out:ay = dc=10e9
```

in der Netzliste.

Eine Analyse des quasistatischen Verhaltens des Netzwerkes (dc-Analyse) brachte das folgende Ergebnis.

```

          dc
time 0
-----
ax      0
axr     0
ay     10g
ayr    10g
az      0
azr     0
wx      0
wxr     0
wy      0
wyr     0
wz      0
wzr     0
x13    -1.707u
```

x17	1.707u
x5	1.707u
x9	-1.707u
y13	-0.02613
y17	-0.02613
y5	-0.02613
y9	-0.02613
z13	0.001801
z17	0.001801
z5	-0.001801
z9	-0.001801
0	0

Im Rahmen der Anzeigegenauigkeit stimmen die mittels ANSYS ($26.133 \cdot 10^{-3} \mu m$) und SABER ($26,13 \cdot 10^{-3} \mu m$) berechneten Verschiebungen des Balkenendes überein. Da letztendlich bei der Netzwerkmodellierung die selben Gleichungen gelöst werden wie bei der FEM-Modellierung ist das auch nicht anders zu erwarten.

Die relative Abweichung

$$\frac{26,13 \cdot 10^{-3} \mu m - 26,943 \cdot 10^{-3} \mu m}{26,943 \cdot 10^{-3} \mu m} \approx -3\%$$

der mittels ANSYS und SABER berechneten Werten von dem analytischen Näherungswert sind vor allem mit der groben Elemententeilung des FEM-Modells und mit der Annahme der Bernoulli-Hypothese bei der analytischen Rechnung zu begründen.

Gleichförmige Rotationsbewegung des Bezugssystems

Das Bezugssystem bewege sich gleichförmig rotatorisch mit einer Winkelgeschwindigkeit von 25000 Umdrehungen pro Minute um die X_1 -Achse. Genauer gelte $\bar{\omega} = (2\pi \frac{25000}{60}, 0, 0)$.

Die Beschleunigung A_t ergibt sich dann nach Gleichung (2.5) zu

$$A_t(X) = [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, X + U(X)]] \approx [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, X]] = \bar{\omega} \langle \bar{\omega}, X \rangle - |\bar{\omega}|^2 X.$$

Die linke Seite des Kräftegleichgewichtes

$$F = \int_{\mathcal{U}} \rho_{\text{ref}} A_t(X) dV$$

ist gleich der Zentrifugalkraft, die auf den (undeformierten) Balkenabschnitt \mathcal{U} mit der Masse $\rho_{\text{ref}}(l - X_3)bh$ im Schwerpunkt $(0, 0, \frac{1}{2}(X_3 + l))$ wirkt

$$F(X_3) = \left(0, 0, -|\omega|^2 \rho_{\text{ref}} bh (l - X_3) \frac{1}{2} (l + X_3) \right) = \left(0, 0, -|\omega|^2 \rho_{\text{ref}} \frac{bh}{2} (l^2 - X_3^2) \right)$$

Da die Zentrifugalkraft entlang der Balkenachse wirkt, ist das resultierende Moment bzgl. $(0, 0, X_3)$ gleich Null

$$M = 0.$$

Das Einsetzen von F und M in das Differentialgleichungssystem (3.12) mit den Anfangsbedingungen $s(0) = 0$ und $\phi(0) = 0$ ergibt

$$\begin{aligned}\phi(X_3) &= 0, \\ s_1(X_3) &= 0, \\ s_2(X_3) &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_3(X_3) &= \frac{\rho_{\text{ref}}}{2E} \int_0^{X_3} |\bar{\omega}|^2 (l^2 - \tilde{X}_3^2) d\tilde{X}_3 = \dots \\ &= \frac{\rho_{\text{ref}}}{2E} (l^2 X_3 - \frac{1}{3} X_3^3).\end{aligned}$$

Mit den Werten für l , ρ_{ref} , E , $|\bar{\omega}|$ erhält man aus der letzten Gleichung die Verschiebung der Balkenachse im freien Balkenende zu

$$s_3(l) = 40,8145 \cdot 10^{-6} \mu\text{m}.$$

Der Radius des Wasserstoffatoms beträgt 53pm (siehe z. B. [16]). Damit ist die berechnete Verschiebung $s_3(l) = 40.8\text{pm}$ vermutlich nur im Rahmen der hier durchgeführten Modellverifikation relevant, und zum Aufbau von Beschleunigungssensoren werden zusätzliche seismische Massen benötigt.

Zur Berechnung des einseitig eingespannten Balkens im rotierenden Bezugssystem mittels ANSYS wurde das gleiche FEM-Modell genutzt wie für den Fall des translatorisch beschleunigten Bezugssystems. Der einzige Unterschied bei der statischen Analyse bestand darin, daß mit dem ANSYS-Kommando `omega,2618` eine Rotationsbewegung des Bezugssystems um die X_1 -Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit von $2618 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ($\cong 25000$ Umdrehungen pro Sekunde) vorgegeben wurde. Die translatorische Beschleunigung wurde auf Null zurückgesetzt.

Das Verschiebungsbild, das nach der statischen Analyse ausgegeben wurde, ist in Bild 3.5 zu sehen. Außerdem wurde nach der statischen Analyse für die Gitterpunkte am freien Balkenende die folgende Ergebnisliste erzeugt.

```
PRINT U      NODAL SOLUTION PER NODE

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000      LOAD CASE=      0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE          UZ
   5  0.39649E-04
   9  0.39649E-04
  13  0.39649E-04
  17  0.39649E-04

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE          17
VALUE      0.39649E-04
```

Für die Netzwerkmodellierung des einseitig eingespannten Balkens im rotierenden Bezugssystem brauchten in obiger SABER-Netzliste nur die Signale der Signalquellen geändert werden.

```
src.srcax out:ax = dc=0 #
src.srcay out:ay = dc=0 #
src.srcaz out:az = dc=0 #
src.srcwx out:wx = dc=2618 # (rad / s) entspricht 25000 U/min
src.srcwy out:wy = dc=0 #
src.srcwz out:wz = dc=0 #
```

Die quasistationäre Analyse des Netzwerkes führte zu folgenden Ergebnissen.

```
          dc
time 0
-----
ax      0
axr     0
ay      0
ayr     0
az      0
azr     0
wx     2618
wxr     2618
wy      0
wyr     0
wz      0
wzr     0
x13    -124.6n
x17     124.6n
x5     -124.6n
x9      124.6n
y13    -118n
y17    -118n
y5      118n
y9      118n
z13     39.65u
z17     39.65u
z5      39.65u
z9      39.65u
0       0
```

Im Rahmen der Anzeigegenauigkeit stimmen die Ergebnisse der Rechnungen mit dem FEM-Modell ($39,649 \cdot 10^{-6} \mu m$) und mit dem Netzwerkmodell ($39,65 \cdot 10^{-6} \mu m$) überein.

Genau wie im Falle des translatorisch beschleunigten Bezugssystems ist die relative Abweichung

$$\frac{39,65 \cdot 10^{-6} \mu m - 40,8145 \cdot 10^{-6} \mu m}{40,8145 \cdot 10^{-6} \mu m} \approx -2.9\%$$

der mit ANSYS und SABER ermittelten Verschiebung von dem analytischen Näherungswert mit der groben Elemententeilung des FEM-Modells bei der numerischen Berechnung und mit der Voraussetzung der Bernoulli-Hypothese bei der analytischen Rechnung zu begründen.

```

ANSYS 5.6
FEB 10 2000
18:55:48
DISPLACEMENT
STEP=1
SUB =1
TIME=1
RSYS=0
DMX =.026195

DSCA=1909
XV =-.340066
YV =.169721
ZV =.92496
DIST=266.816
XF =-24.941
ZF =501.719
A-ZS=-1.74

```

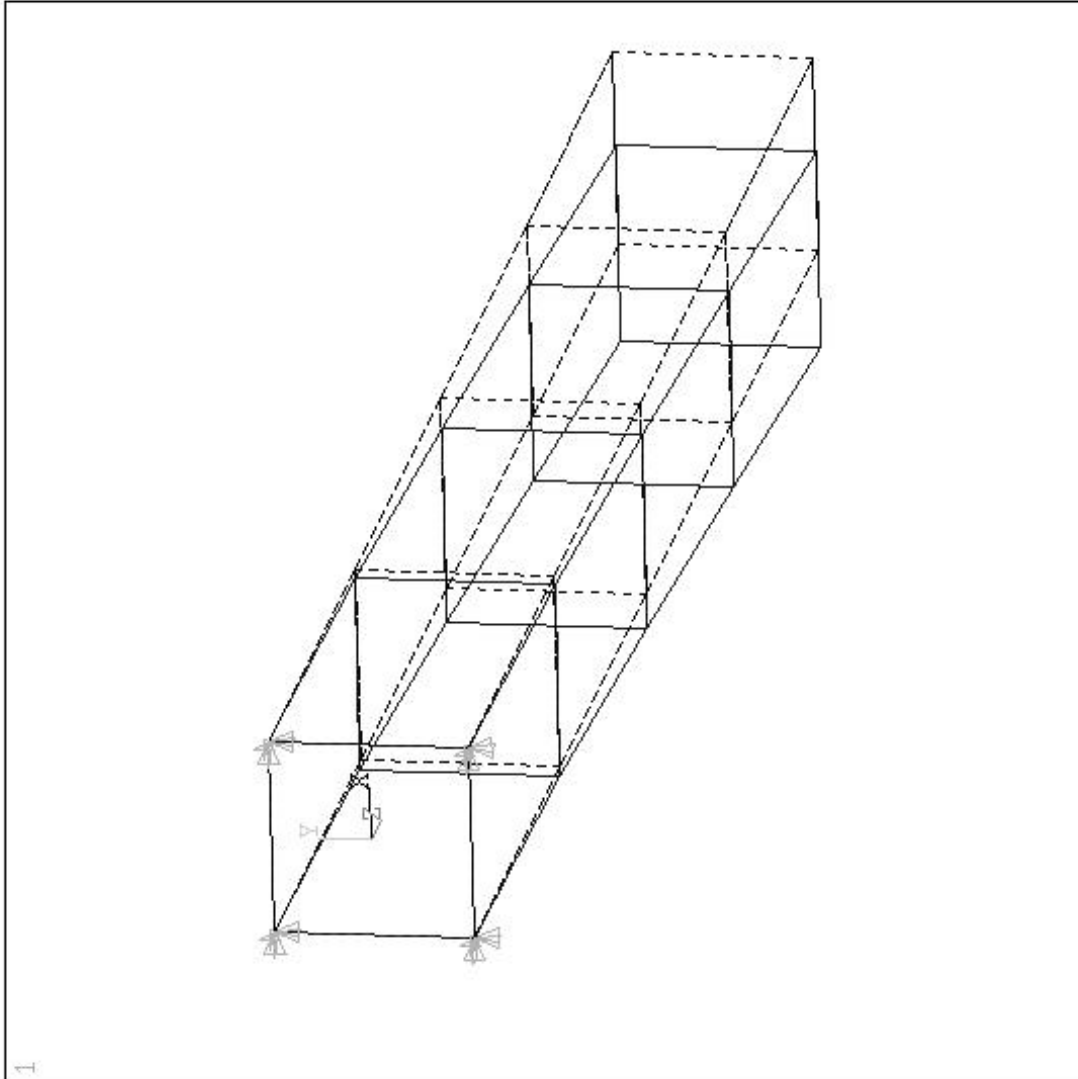


Abbildung 3.5: Finite-Elemente-Modell des translatorisch beschleunigten Balkens. Der unverformte Balken ist mit einer Strichellinie und der deformierte Balken mit einer ausgezogenen Linie dargestellt. Wie bei Deformationsbildern üblich, wurde die Deformation stark vergrößert dargestellt. Die Dreiecke kennzeichnen die Gitterpunkte, an denen die Verschiebungsrandbedingungen der Einspannung vorgegeben sind.

```

ANSYS 5.6
FEB 10 2000
18:58:33
DISPLACEMENT
STEP=1
SUB =1
TIME=1
RSYS=0
DMX =.396E-04
DSCA=.126E+07
XV =-.173648
YV =.085832
ZV =.98106
DIST=154.897
ZF =525
A-ZS=-.870385
    
```

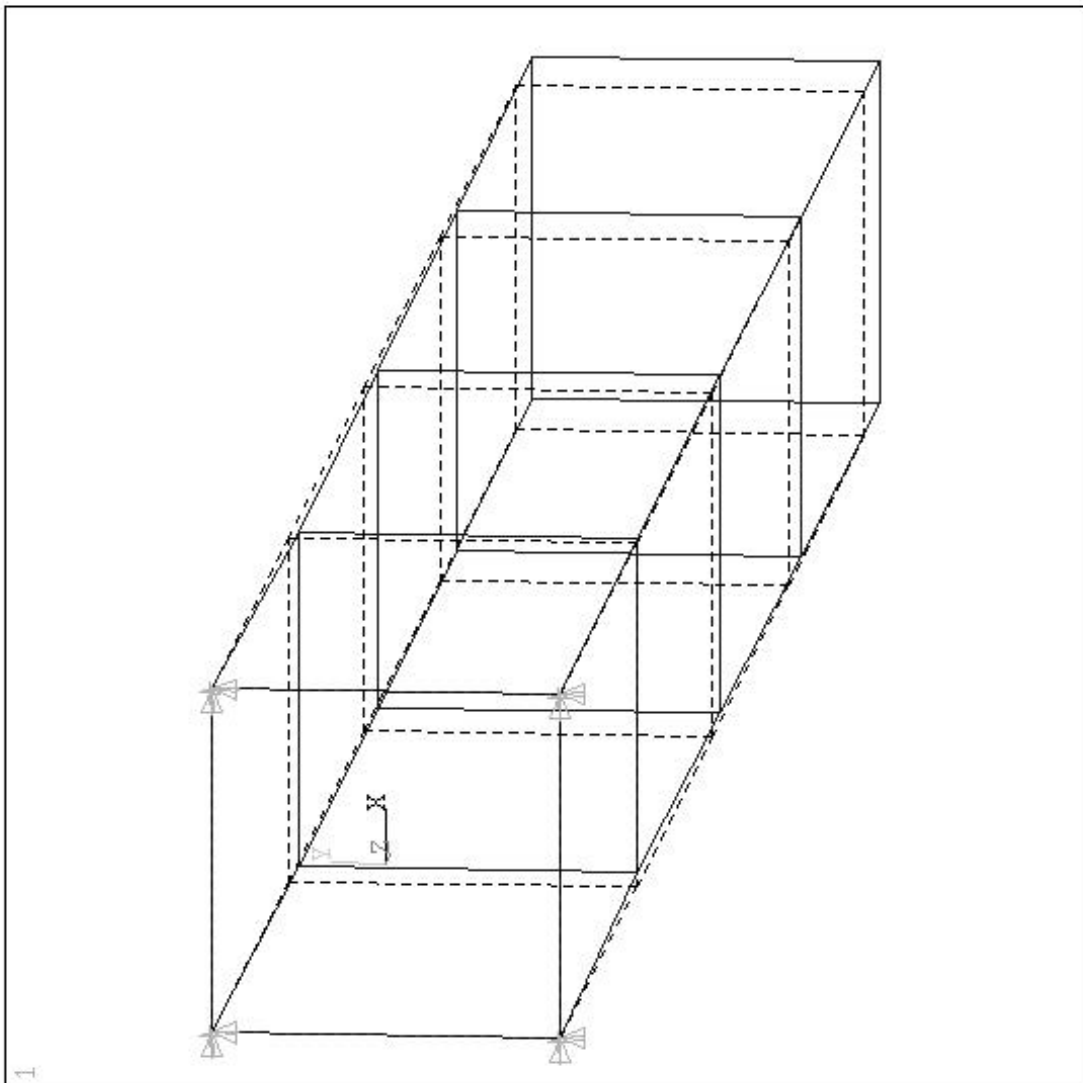


Abbildung 3.6: Deformation des um die X_1 -Achse rotierenden Balkens. Bitte auch die Hinweise in Bildunterschrift 3.5 beachten.

Alle Programmtexte zur Ausgabe dieser Ergebnisse sind zur Zeit der Abgabe der Diplomarbeit in dem Verzeichnis

```
/home/sim/tobias/Ansys/Beispiele/Balken2/
```

auf den Rechnern des CAE-Pools im Fraunhofer Institut für Integrierte Schaltungen gespeichert und sollen später auf CD gebrannt werden.

Die ANSYS-Kommandos befinden sich in der Datei `balken.ans`, die SABER-Netzliste zur Modellierung des eingespannten Balkens im translatorisch beschleunigten Bezugssystem ist unter dem Namen `balken-transl-x.sin` abgespeichert und diejenige zur Modellierung des Balkens im rotierenden Bezugssystem unter dem Namen `balken-rot-x.sin`.

Schluß

In dieser Arbeit wurde entsprechend der Zielstellung eine physikalische und mathematische Begründung für die Transformation der translatorischen Knotengrößen von FEM-Systemen gegeben, und es wurde dargestellt, wie sich FEM-Systeme elastischer Körper in Netzwerkmodelle übersetzen lassen. Dennoch blieben viele Fragen offen.

Zum einen wurden keine Verluste berücksichtigt. Das heißt, es wurde angenommen, daß die in der Aufgabenstellung zur Diplomarbeit erwähnte Dämpfungsmatrix D gleich Null ist.

Die Dämpfung in mechanischen Systemen kann vielfältige Ursachen haben und ist im allgemeinen schwer theoretisch zu beschreiben. Bei mikromechanischen Systemen wird die Dämpfung meist durch die Luftreibung dominiert (siehe z. B. [30]). Bei der FEM-Modellierung mechanischer Strukturen wird üblicherweise von einer sogenannten Bequemlichkeitshypothese ausgegangen. Die Dämpfungsmatrix D wird einfach als Linearkombination der Massenmatrix M und der Steifigkeitsmatrix K dargestellt. Passende Koeffizienten für diese Linearkombination müssen meßtechnisch ermittelt werden (siehe auch [27, 6]). Bei Netzwerkmodellen, die mittels des von mir modifizierten Programms `file2mast` generiert werden, wird die Dämpfungsmatrix mit den Knotengeschwindigkeiten multipliziert, die die Gitterpunkte gegenüber dem Inertialsystem haben und die bzgl. des bewegten Koordinatensystems koordinatisiert sind. Das kann ungünstig sein, denn bei einem luftdicht abgeschlossenen Sensor wird sich das darin enthaltene Gas (z. B. Restluft) zu einem gewissen Grade mit dem Sensorgehäuse mitbewegen.

Aus der hohen Dimension der FEM-Systeme von technisch relevanten mechanischen Strukturen erwächst ein weiteres Problem, dessen Behandlung den Rahmen dieser Diplomarbeit gesprengt hätte. Schon bei dem einfachen Beispiel des FEM-Systems eines Balkens aus Abschnitt 3.3 mit zwanzig Gitterpunkten und mit drei Freiheitsgraden pro Gitterpunkt ergibt sich ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung in 120 skalaren Variablen. Berücksichtigt man, daß für die Gitterpunkte an der Einspannung keine Zustandsvariablen benötigt werden, bleiben noch 96 skalare Variablen. Während in FEM-Analyseprogrammen Algorithmen zur Lösung von Differentialgleichungssystemen sehr hoher Ordnung implementiert sind, sind die Algorithmen in Netzwerkanalyseprogrammen eher für die Lösung von Algebrodifferentialgleichungssystemen niedrigerer Dimension mit einer komplexeren nichtlinearen rechten Seite ausgelegt.

Um dennoch aus FEM-Systemen komplexerer Strukturen verwendbare Netzwerkmodelle generieren zu können, müssen die FEM-Systeme (drastisch) in ihrer Dimension reduziert werden. Dazu wird meist das Verfahren der statischen Kondensation eingesetzt, welches in den meisten Standardwerken zur Methode der finiten Elemente beschrieben ist. Während bei Systemen ohne Trägheiten und Dämpfung (Massenmatrix und Dämpfungsmatrix gleich Null) die statische Kondensation nichts weiter als die teilweise Lösung des FEM-Systems darstellt, ist die Wirkung der statischen Kondensation bei FEM-Systemen mit Trägheiten nicht so einfach mathematisch zu beschreiben. Auch in Büchern wie [33] werden dazu nur vage Andeutungen gemacht.

In dieser Diplomarbeit werden ausschließlich finite Elemente mit translatorischen Freiheitsgraden behandelt. Zur Modellierung von mechanischen Strukturen werden jedoch bei den meisten FEM-Programmen auch finite Elemente mit rotatorischen Freiheitsgraden angeboten. Ist \hat{Q}_t die Drehmatrix einer bzgl. des bewegten Bezugssystems (r_t, Q_t) koordinatisierte Drehbewegung, so lautet ihre Drehmatrix bzgl. des Inertialsystems $(0, \mathbf{Id})$

$$\tilde{Q}_t = Q_t \hat{Q}_t.$$

Durch zeitliches Ableiten dieser Gleichung erhält man die Gleichung

$$\tilde{\omega}_t = \omega_t + Q_t \hat{\omega}_t$$

für die Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung \tilde{Q}_t . Nochmaliges zeitliches Ableiten liefert die Gleichung

$$\dot{\tilde{\omega}}_t = \dot{\omega}_t + Q_t \dot{\hat{\omega}}_t + [\omega_t, Q_t \hat{\omega}_t]$$

für die Winkelbeschleunigung der Drehbewegung \tilde{Q}_t . Koordinatisiert man die letzten zwei Gleichungen bzgl. (r_t, Q_t) , so erhält man die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_t &= \tilde{\omega}_t + \hat{\omega}_t \\ \bar{\dot{\omega}}_t &= \dot{\tilde{\omega}}_t + \dot{\hat{\omega}}_t + [\bar{\omega}_t, \hat{\omega}_t]. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden in [19] und in [3] zur Transformation der Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen der rotatorischen Freiheitsgrade von FEM-Systemen genutzt. Wahrscheinlich ist es möglich, dieses Vorgehen ähnlich wie bei den translatorischen Freiheitsgraden zu begründen.

Literaturverzeichnis

- [1] <http://www.samcef.com/>.
- [2] <http://symphony.clarku.edu/atkinson/felt/felt.html>.
- [3] *Ansys program documentation*. SAS IP, Inc., 1996.
- [4] *Saberbook*. Analogy, 1997.
- [5] W. F. Ames. *Numerical methods for partial differential equations*. Academic Press, London, 1992.
- [6] K. J. Bathe. *Finite-Elemente-Methode*. Springer Verlag, Berlin, 1990.
- [7] E. Becker und W. Bürger. *Kontinuumsmechanik*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1975.
- [8] A. Bertram. *Axiomatische Einführung in die Kontinuumsmechanik*. BI-Wiss.-Verl., Berlin, 1989.
- [9] D. Braess. *Finite Elemente*. Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [10] L. O. Chua, C. A. Desoer und E. S. Kuh. *Linear and Nonlinear Circuits*. McGraw-Hill, New York, 1987.
- [11] Institut für integrierte Schaltungen an der Fraunhofergesellschaft (Außenstelle automatisierter Systementwurf). *Dokumentation zur mimosysmodellbibliothek*.
- [12] K. Jänich. *Vektoranalysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [13] K. Jänich. *Topologie*. Springer, Berlin, 1994.
- [14] K. Jänich. *Lineare Algebra*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [15] C. Johnson. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Studentlitteratur, Lund, 1987.
- [16] G. Joos. *Lehrbuch der theoretischen Physik*. AULA-Verlag, Wiesbaden, 15. Aufl., 1989.
- [17] K. Königsberger. *Analysis 2*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [18] K. Königsberger. *Analysis 1*. Springer-Verlag, Berlin, 3. Aufl., 1995.
- [19] G. Lorenz und R. Neul. *Network-type modeling of micromachined sensor systems*. Proc. Technical proceedings of MSM98, S. 233–238, 1998.

- [20] J. E. Marsden und T. J. R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publications, Inc., New York, 1993.
- [21] Th. Meis und U. Marcowitz. *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen*. Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [22] G. Müller und I. Rehfeld. *FEM für Praktiker*. expert-Verlag, Ehningen bei Böblingen, 1993.
- [23] J. S. Przemieniecki. *Theory of Matrix Structural Analysis*. McGraw-Hill Inc., New York, 1986.
- [24] D. Reddy. *Introductory Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [25] A. Reibiger. *Vorlesungsskript zum Fach „Netzwerktheorie und Numerische Verfahren zur Netzwerkanalyse“*, SS1994/WS94-95.
- [26] F. Reinhardt und H. Soeder. *dtv-Atlas zur Mathematik*, Bd. 2. Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 1991.
- [27] W. O. Schielen. *Technische Dynamik*. Teubner, Stuttgart, 1985.
- [28] S. D. Senturia, N. Aluru und J. White. *Simulating the behavior of mems devices: Computational methods and needs*. IEEE Computational Science and Engineering, S. 30–43, 1997.
- [29] S. M. Sze. *Semiconductor Sensors*. John Wiley and Sons, New York, 1994.
- [30] T. Veijola, H. Kuisma, J. Lahdenperä und T. Ryhänen. *Simulation model for micromechanical angular rate sensor*. Sensors and Actuators, A(60):113–121, 1997.
- [31] A. Ženišek. *Nonlinear elliptic and evolution problems and their finite element approximations*. Academic Press, London, 1990.
- [32] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Aufl., 1997.
- [33] R. Zurmühl und S. Falk. *Matrizen und ihre Anwendung*. Springer-Verlag, 5. Aufl., 1986.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Diplomarbeit zum Thema „Entwicklung von Verhaltensmodellen für mikromechanische Komponenten“ selbstständig und nur unter Zuhilfenahme der im Literaturverzeichnis angegebenen Literatur erarbeitet habe.

Dresden, den 14. Februar 2000

Tobias Nähring